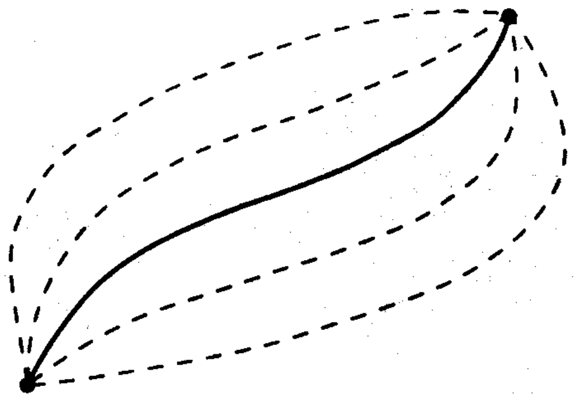
საქართველოს საპატრიარქოს წმ. ანდრია პირველწოდებულის სახელობის
ქართული უნივერსიტეტი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანზორ ხელაშვილი

ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება



გამომცემლობა "ნეკერი"
თბილისი, 2008

ვუძღვნი სტუდენტთა მომავალ თაობებს,

მათ შორის ჩემს ყველაზე საყვარელ ადამიანებს

– პატარა სალომეს და სანდროს, რომელთაგან

პირველი მეძახის ბაბუს, ხოლო მეორე - ბაბას.

ავტორი

"მეცნიერება არც მე მაჭმევს პურს, მაგრამ მაინც არ ვღალატობ მას"

/მარკ ავრელიუსი, "ფიქრები"/

St. Andrea's Georgian University of the Patriarchy of GEORGIA
Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

ANZOR KHELASHVILI

FEYNMAN'S FUNCTIONAL INTEGRAL AND SOME OF ITS APPLICATION

Publishing House "Nekeri"
Tbilisi

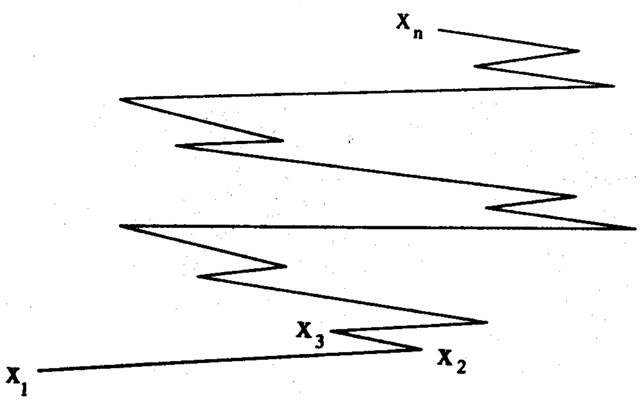
2008

საქართველოს საპატრიარქოს წმ. ანდრია პირველწოდებულის სახელობის
ქართული უნივერსიტეტი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანზორ ხელაშვილი

ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

მონოგრაფია და დამხმარე სახელმძღვანელო თეორიული ფიზიკის სპეციალობის
მაგისტრატურის სტუდენტებისა და დოქტორანტებისათვის



გამომცემლობა “ნეკერი”
თბილისი
2008

წინამდებარე მონოგრაფია ეძღვნება ფეინმანის ფუნქციონალური (კონტინუალური) ინტეგრალის ფორმალიზმს. ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალი ანუ როგორც ხშირად უწოდებენ მას, წირებზე ინტეგრალი, თანამედროვე ფიზიკაში ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი კატეგორიაა. მისი საშუალებით ჩაკეტილი ფორმით იწერება სხვადასხვა კორელაციური და გრინის ფუნქციები. მას ფართოდ გამოიყენებენ კვანტურ მექანიკაში, სტატისტიკურ ფიზიკაში, კონდენსირებული გარემოს ფიზიკაში, განსაკუთრებული გამოყენება მეთოდმა ჰპოვა ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკასა და ველის კვანტურ თეორიაში. დღეისათვის ეს ფორმალიზმი არის ერთადერთი ადეკვატური მათემატიკური აპარატი, რომლის მეშვეობითაც ხდება ყალიბრული ველების დაკვანტვა. განსაკუთრებით ეს ეხება ე.წ. არააბელურ ყალიბრულ თეორიებს და გრავიტაციას.

უნდა ითქვას, რომ ამ წიგნის გამოცემა ქართულ ენაზე პირველი ცდაა და საფუძვლად უდევს ავტორის მიერ წაკითხული მრავალწლიანი სალექციო კურსები ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის მაგისტრატურაში, ამ მეთოდის დაუფლება უბრალოდ აუცილებელია თანამედროვე თეორიულ ფიზიკაში მომუშავე ყველა მეცნიერისათვის.

წიგნი განკუთვნილია პირველ რიგში ფიზიკის ფაკულტეტების მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის, აგრეთვე დოქტორანტებისათვის, რომლებიც ეუფლებიან თანამედროვე ფუნდამენტური ფიზიკის თეორიულ საფუძვლებს. ამავე დროს წიგნი სასარგებლო სამსახურს გაუწევს ზემოთჩამოთლილ დარგებში მომუშავე ყველა მეცნიერსა თუ პედაგოგს, დაეხმარება სამეცნიერო და სასწავლო პროცესის მაღალ დონეზე წარმართვაში.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

.

შესავალი

კვანტური მექანიკის ელემენტარულ კურსებში აღწერილია, თუ როგორ გამოითვლება სისტემის ყოფაქცევა შრედინგერის განტოლებით. ეს არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნები შეიძლება მოიძებნოს სათანადო სასაზღვრო პირობების გამოყენებით. მაგალითად, შრედინგერის განტოლება $1/r$ პოტენციალით აღწერს ელექტრონის მოძრაობას კულონურ ველში (მაგ., ბირთვის). თუ ავარჩევთ სასაზღვრო პირობებს ისე, რომ ტალღური ფუნქცია უსასრულობაში ნულისკენ ეცემოდეს უფრო სწრაფად, ვიდრე $1/r$, მაშინ ვიპოვით წყალბადის ატომის ბმული მდგომარეობების სათანადო ამოხსნებს. თუკი სასაზღვრო პირობებს ისე ავარჩევთ, რომ ტალღური ფუნქცია შორ მანძილებზე ეცემოდეს როგორც $1/r$, მივიღებთ გაფანტვის ამოცანის შესაბამის ამოხსნებს, რაც დიფერენციალური განივკვეთისათვის მოგვცემს კარგად ცნობილ რეზერფორდის ფორმულას.

კვანტურ მექანიკაში ფუნქციონალური ინტეგრალით ფორმულირება სხვა არაფერია, თუ არა შრედინგერის განტოლების ამოხსნა. ეს მიდგომა სავსებით ეკვივალენტურია ტრადიციული შრედინგერის მიდგომისა. ამავე დროს დავრწმუნდებით, რომ ეს მიდგომა გარკვეული შინაარსით უფრო ზოგადია, ვიდრე ტრადიციული კვანტური მექანიკა. ამიტომ არის, რომ ფუნქციონალური ინტეგრალი ფართოდ გამოიყენება ფიზიკის სხვადასხვა სფეროში.

ყველაზე ფართო გამოყენება მეთოდმა ჰპოვა ველის კვანტურ თეორიაში, განსაკუთრებით ყალიბრული ველების დაკვანტვის ურთულეს საკითხებში. ფეინმანის ინტეგრალი წირებზე (ან ტრაექტორიებზე) წარმოადგენს კვანტური მექანიკის ალტერნატიულ ფორმულირებას ტალღური (შრედინგერის) მექანიკის და მატრიცული (ჰაიზენბერგის) მექანიკის გვერდით.

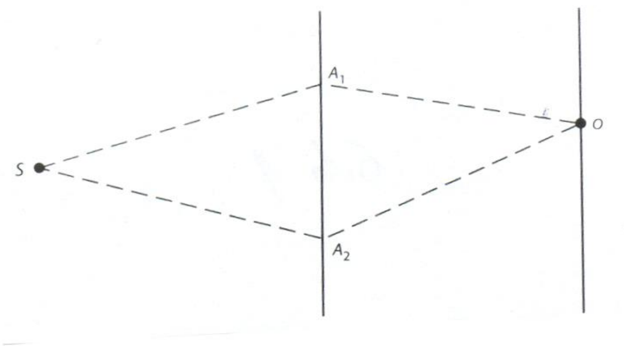
მეთოდის ფორმულირებასა და განვითარებაში ძირითადი დამსახურება მიუძღვის მე-20 საუკუნის ერთ-ერთ წამყვან ფიზიკოს-თეორეტიკოსს, რიჩარდ ფაინმანს (Richard P.Feynman). აი, რას წერს ამის თაობაზე მისი ერთ-ერთი მასწავლებელი და კვანტური ელექტროდინამიკის ფუძემდებელთა შორის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ფიგურა ფრიმენ ჯონ დაისონი:

“ამ ოცდაათიოდე წლის წინ დიკ ფეინმანი მომიყვა კვანტური მექანიკის თავისეული ვარიანტის შესახებ, რომელიც ემყარებოდა ისტორიების მიხედვით აჯამვას. “ელექტრონი აკეთებს ყველაფერს, რაც კი მოესურვება,–მეუბნება იგი.–ის მოძრაობს ნებისმიერი მიმართულებით, ნებისმიერი სიჩქარით წინ ან უკან დროში, როგორც მას უნდა. შენ კი ჯამავ სათანადო ამპლიტუდებს, და ეს გაძლევს ტალღურ ფუნქციას”. მე მას ვუთხარი: “შენ შეშლილი ხარ-მეთქი”. მაგრამ ის არ იყო შეშლილი.

ამ მცირეოდენი შესავლის შემდეგ გადავიდეთ ფენმანის ფორმულირებაზე, წინასწარ დავურთოთ რა დაისონთან (პროფესორთან) დისკუსიის შესაძლო სცენარი.

– კვანტური მექანიკის ფორმულირება წირით ინტეგრალებზე /ფეინმანის ინტეგრალი წირებზე/

წარმოვიდგინოთ,რომ პროფესორი უხსნის სტუდენტებს ორი ხვრელის კარგად ცნობილ ექსპერიმენტს. S წყაროდან საწყის $t=0$ მომენტში გამოსხივებული ნაწილაკი გადის ერთ-ერთ ხვრელთაგანში, A_1 ან A_2, რომლებიც გაკეთებულია ტიხარში და აღირიცხება $t=T$ მომენტში დეტექტორის მიერ, რომელიც მოთავსებულია O წერტილში. (ნახ.1)



ნახაზი 1

კვანტური მექანიკის ფუნდამენტური პოსტულატის თანახმად ნაწილაკის აღრიცხვის ალბათობის ამპლიტუდა ტოლია იმ ამპლიტუდების ჯამისა, რომ ნაწილაკი O წერტილში მოხვდება A_1 ხვრელის გავლის შედეგად S წყაროდან გავრცელების შემდეგ და მოხვდება იმავე წერტილში A_2 ხვრელის გავლით.

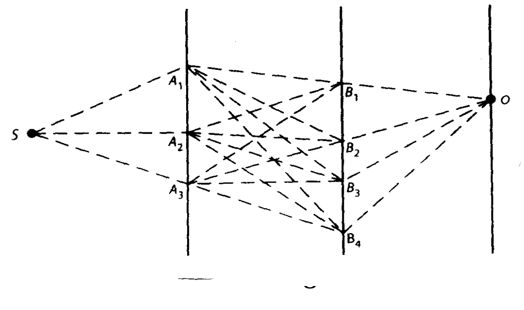
წარმოვიდგინოთ აგრეთვე, რომ აუდიტორიაში ზის ჭკვიანი სტუდენტი, ვთქვათ, ფეინმანი, რომელიც სვამს ასეთ კითხვას: “კი, მაგრამ, პროფესორო, რა მოხდება თუ გავუკეთებთ მესამე ხვრელსაც?” პროფესორი პასუხობს: ნათელია, რომ დეტექტირების ამპლიტუდა ახლა იქნება ჯამი უკვე სამი ამპლიტუდისა – წინა ორს უნდა დავუმატოთ მე-3 ხვრელით გავლის შედეგად O წერტილში მოხვედრის ამპლიტუდა.

პროფესორი უკვე მზადაა გააგრძელოს თხრობა, მაგრამ ფეინმანი კვლავ აწყვეტინებს: “თუკი ახლა გავუკეთებთ მეოთხე და მეხუთე ხვრელებს?”. პროფესორი პასუხობს, “კეთილი ახალგაზრდავ, ვფიქრობ თქვენთვის და მთელი კლასისთვის ნათელი უნდა იყოს, რომ ჩვენ უნდა ავჯამოთ ყველა ხვრელების მიხედვით”.

ჩვენთვის ნათელია, რომ პროფესორი მართალს ამბობს. თუ S წყაროდან A_i-ურ ხვრელში გავლით O წერტილში მოხვედრის ამპლიტუდებს აღვნიშნავთ ასე : $A(S \to A_i \to O)$, მაშინ იმის ამპლიტუდა, რომ ნაწილაკს დავაფიქსირებთ O წერტილში, მოიცემა შემდეგნაირად

$$A(O) = \sum_i A(S \to A_i \to O) \qquad (1)$$

მაგრამ ფეინმანი არ ცხრება, “რა მოხდება, თუ დავდგამთ კიდევ ერთ ტიხარს, რომელშიც რამდენიმე ხვრელიც იქნება?” (ნახ.2).

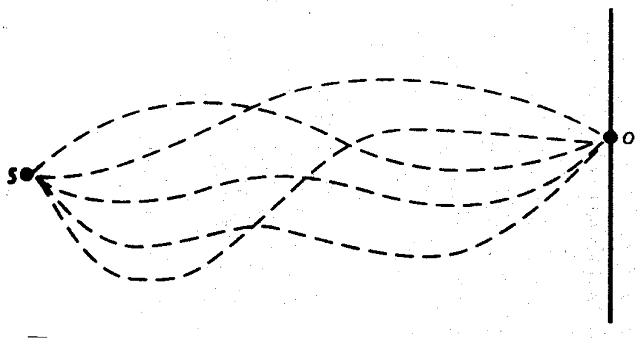


ნახაზი 2

პროფესორი: "განა ვერ ხვდები, რომ უნდა აიღო S წყაროდან A_i ხვრელის გავლით პირველ ტიხარში გასვლის ამპლიტუდა, შემდეგ მე-2 ტიხარის B_j ხვრელში გასვლის ამპლიტუდა, შემდეგ O დეტექტორამდე მისვლის ამპლიტუდა და აჯამო ყველა i და j -ის მიხედვით?"

ფეინმანი აგრძელებს კითხვებს: "რა მოხდება, თუ დავაყენებ მე-3 ტიხარს? რა მოხდება, თუ თითოეულ ტიხარში გავუკეთებ უსასრულო რაოდენობის ნახვრეტებს, ანუ ფაქტიურად ტიხარი აღარ მექნება?" პროფესორი ამშვიდებს, "მოდით ერთად ვიმსჯელოთ".

ჩვენ ვხედავთ, რომ ფეინმანი სწორედ თვლიდა, რომ თუ ჩვენ ტიხარში გავუკეთებთ უსასრულო რაოდენობის ნახვრეტებს, ეს ნიშნავს, რომ ტიხარი აღარა გვაქვს იმ ადგილზე. რა გამოდის აქედან? წყაროსა და დეტექტორს შორის ტიხარი საერთოდ რომ არ გვქონდეს ანუ ეს სივრცე რომ იყოს ცარიელი, წყაროდან დეტექტორამდე ნაწილაკის გავრცელების ამპლიტუდა არის ჯამი ამპლიტუდებისა, რომ ნაწილაკმა გაიაროს თითოეული ხვრელი ყველა (არარსებულ) ტიხარში. სხვა სიტყვებით, ჩვენ უნდა ავჯამოთ ყველა ამპლიტუდების მიხედვით, რომლებიც შეესაბამება ნაწილაკის გავრცელების ამპლიტუდას წყაროდან დეტექტორამდე ყველა შესაძლო წირების გასწვრივ (ნახ.3)

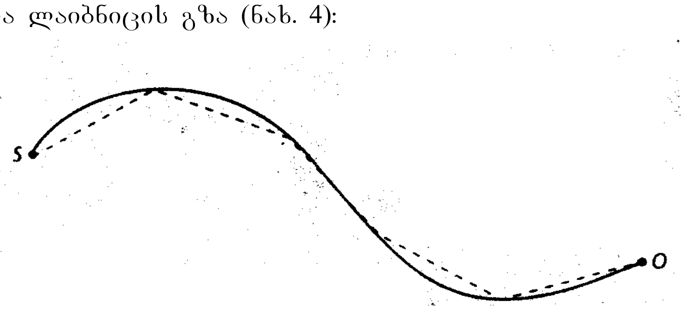


ნახაზი 3

ცხადია,რომ გვექნება:

$$A(\text{ ნაწილაკი ვრცელდება } S \text{ წყაროდან } O \text{ წერტილამდე } T \text{ დროში})=$$
$$= \sum_{(paths)} A(\text{ ნაწილაკი ვრცელდება ცალკეული წირის გასწვრივ}) \qquad (2)$$

ახლა უნდა ვიფიქროთ, თუ როგორ გავაფორმოთ ეს აჯამვა მკაცრად მათემატიკურად. ფეინმანმა აირჩია ნიუტონისა და ლაიბნიცის გზა (ნახ. 4):



ნახაზი 4

წირის აპროქსიმაცია მოვახდინოთ წრფივი სეგმენტებით, და შემდეგ, სეგმენტები მივასწრაფოთ ნულისაკენ. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ზუსტად ეთანადება სივრცის შევსებას ერთმანეთთან უსასრულოდ ახლო მყოფი ტიხარებით, რომლებშიც გაკეთებულია უსასრუ;ოდ ბევრი ხვრელი.

ყველაფერი კარგი, მაგრამ როგორ ავაგოთ ცალკეულ წირზე გავრცელების ამპლიტუდები? შეგვიძლია გამოვიყენოთ კვანტურ მექანიკაში კარგად ცნობილი უნიტარობის თვისება: თუ ვიცით ამპლიტუდა თითოეულ ინდივიდუალურ სეგმენტზე, მაშინ ჩვენ გადავამრავლებთ მათ, რათა ვიპოვოთ სრული ამპლიტუდა.

კვანტურ მექანიკაში q_1 წერტილიდან q_2 წერტილში T დროში გავრცელების ამპლიტუდა განისაზღვრება უნიტარული ოპერატორით $\exp(-iHT)$, სადაც H არის სისტემის ჰამილტონიანი. უფრო ზუსტად, აღვნიშნოთ $|q\rangle$ სიმბოლოთი მდგომარეობა, რომელშიც ნაწილაკი იმყოფება q წერტილში, მაშინ ჩვენთვის საინტერესო ამპლიტუდა არის $\langle q_F|\exp(-iHT|q_I)$. აქ ვიყენებთ დირაკის ბრა- და კეტ- აღნიშვნებს.

თურმე მთელი წირითი ფორმალიზმი შეიძლება ჩაიწეროს მათემატიკურად ზემოთ მოყვანილი მატრიცული ელემენტის მეშვეობით, ფეინმანის ტიხარების და უსასრულო რაოდენობის ხვრელების გარეშე. ისტორიულად წირითი ინტეგრალის ფორმალიზმი ფეინმანამდე აღმოჩენილი იყო დირაკის მიერ, რომელმაც გაკვრით მიუთითა თავის კვანტური მექანიკის სახელმძღვანელოში.

ფეინმანის წირითი ინტეგრალის ფრმულირება აღმოჩნდა მეტად მძლავრი მეთოდი კვანტურ მექანიკაში, სტატისტიკურ მექანიკაში და ველის კვანტურ თეორიაში. ის ფართოდ გამოიყენება ნაწილაკთა ფიზიკის, მყარი სხეულების ფიზიკის, პოლიმერთა ფიზიკის, სტოქასტური პროცესებისა თუ კვანტური გრავიტაციის ამოცანებში.

ამიტომ, გადაჭარბებული არ იქნება ითქვას, რომ ფუნქციონალური ინტეგრალი თანამედროვე თეორიულ ფიზიკაში ასრულებს ისეთსავე როლს, რასაც ასრულებდა უკანასკნელ საუკუნეებში დიფერენციალური განტოლებები.

თავი I. კვანტური მექანიკის ძირითადი თანაფარდობანი

როგორც შესავალში იყო აღნიშნული ფეინმანის ფუნქციონალურ ინტეგრალს (ხშირად მას კონტინუალურ ინტეგრალსაც უწოდებენ, ისევე, როგორც ინტეგრალს წირებზე ან ტრაექტორიებზე) აქვს საკმაოდ ფართო გამოყენება თანამედროვე ფიზიკის თითქმის ყველა სფეროში. რა თქმა უნდა, ყველაზე პირველი და მარტივი გამოყენება მას აქვს კვანტურ მექანიკაში. უფრო მეტიც, ეს მეთოდი წარმოადგენს კვანტური მექანიკის ალტერნატიულ ფორმულირებას. ამიტომ, ბუნებრივია თუ ამ მეთოდის გაცნობას დავიწყებთ კვანტური მექანიკით.

პირველ რიგში მოგვიწევს კვანტური მექანიკის ძირითადი პრინციპების გახსენება და არსებული წარმოდგენების გადახედვა.

I-1. კვანტური მექანიკის მოკლე მიმოხილვა

კვანტური მექანიკის ჩვეულებრივი მიდგომა იყენებს კლასიკური მექანიკის ჰამილტონისეულ ფორმულირებას და დაკვირვებად სიდიდეებს უთანადებს არაკომუტირებად ოპერატორებს. ამ შემთხვევაში დინამიკა მოიცემა დროზე დამოკიდებული შრედინგერის განტოლებით

$$i\hbar \frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle \qquad \text{(I-1.1)}$$

სადაც H აღნიშნავს სისტემის ჰამილტონის ოპერატორს, ხოლო $|\psi(t)\rangle$ არის სისტემის მდგომარეობის ვექტორი.

თუ ამოცანას ვიხილავთ კოორდინატულ წარმოდგენაში (მაგალითად, ერთგანზომილებიანი მოძრაობისათვის), ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle \qquad \text{(I-1.2)}$$

აკმაყოფილებს შრედინგერის განტოლებას

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = H(x)\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) \qquad \text{(I-1.3)}$$

ზემოთ $|x\rangle$ არის კოორდინატული წარმოდგენის საბაზისო ვექტორი. $\psi(x,t)$ განსაზღვრავს სისტემის ევოლუციას დროის მიხედვით.

შრედინგერის განტოლების ამოხსნის გარდა მთავარი მიზანი მდგომარეობს იმაში, რომ განისაზღვროს სისტემის დროში ევოლუციის ოპერატორი, რომელიც გენერირებს სისტემის ტრანსლაციებს დროის მიხედვით. ცნობილია, რომ დროის

მიხედვით ევოლუციის ოპერატორი კვანტურ-მექანიკურ სისტემას ადრინდელი t_2 მომენტიდან გადაიყვანს მომავალ (შემდგომ) t_1 მომენტში შემდეგი თანაფარდობით

$$\left|\psi(t_1)\right\rangle = U(t_1,t_2)\left|\psi(t_2)\right\rangle \tag{I-1.4}$$

ნათელია, რომ როცა ჰამილტონიანი დროზე დამოუკიდებელია, (I-1.1) განტოლების ფორმალური ამოხსნით მივიღებთ, რომ როცა $t_1 > t_2$,

$$U(t_1,t_2) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(t_1-t_2)H\right\}$$

ან, უფრო სრული სახით

$$U(t_1,t_2) = \theta(t_1-t_2)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(t_1-t_2)H\right\} \tag{I-1.5}$$

აშკარაა, რომ დროში ევოლუციის ოპერატორი სხვა არაფერია, თუ არა დროზე დამოკიდებული შრედინგერის განტოლების გრინის ფუნქცია და აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t_1} - H\right)U(t_1,t_2) = i\delta(t_1-t_2) \tag{I-1.6}$$

რაშიც იოლად დავრწმუნდებით, თუ (I-1.5)-ს მივუყენებთ ფრჩხილებში მოთავსებულ ოპერატორს.

ამ ოპერატორის განსაზღვრა ეკვივალენტურია მისი მატრიცული ელემენტების პოვნისა მოცემულ ბაზისში. ასე, მაგალითად, კოორდინატულ ბაზისში, სადაც

$$\hat{X}\left|x\right\rangle = x\left|x\right\rangle,$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left\langle x_1\right|U(t_1,t_2)\left|x_2\right\rangle = U(t_1,x_1;t_2,x_2) \tag{I-1.7}$$

თუ გვეცოდინება ეს ფუნქცია მთლიანად, მაშინ ტალღური ფუნქციის დროში განვითარებას ჩავწერთ ასე

$$\psi(x_1,t_1) = \int dx_2 U(t_1,x_1;t_2,x_2)\psi(x_2,t_2) \tag{I-1.8}$$

რაც ჰიუგენსის პრინციპის რეალიზაციას წარმოადგენს.

ცხადია, უნდა მოვითხოვოთ, რომ ერთდროულ ზღვარში

$$U(t_1,x_1;t_1,x_2) = \delta(x_1-x_2) \tag{I-1.9}$$

ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული მიდგომა, როდესაც კვანტური მდგომარეობები $\left|\psi(t)\right\rangle$ დამოკიდებულია დროზე, მაშინ როცა ოპერატორები დროზე დამოუკიდებელნია, არის ***შრედინგერის წარმოდგენა.***

როგორც ცნობილია, სისტემის აღწერა შეიძლება ე.წ. ***ჰაიზენბერგის*** სურათშიც, რომელშიც კვანტური მდგომარეობები დამოუკიდებელია დროზე, ხოლო ოპერატორები დროზე დამოკიდებულია ცხადად. (I-1.5)-ის თანახმად, ჰაიზენბერგის სურათში შეგვიძლია ჩავთვალოთ

$$\left|\psi\right\rangle_H = \left|\psi(t=0)\right\rangle_S = \left|\psi(t=0)\right\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}tH}\left|\psi(t)\right\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}tH}\left|\psi(t)\right\rangle_S \tag{I-1.10}$$

ამ სურათში ოპერატორი იღებს თავის თავზე დროზე სრულ დამოკიდებულებას. მაგალითად, კოორდინატის ოპერატორები ასეა ერთმანეთთან დაკავშირებული ამ ორ წარმოდგენაში

$$X_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH}Xe^{-\frac{i}{\hbar}tH}, \tag{I-1.11}$$

(ასევეა ნებისმიერი სხვა ოპერატორიც), ხოლო ამ ოპერატორების საკუთარი მდგომარეობები აკმაყოფილებენ თანაფარდობას

$$X_H(t)|x,t\rangle_H = x|x,t\rangle_H \tag{I-1.12}$$

რასაც ადვილად დავაკავშირებთ შრედინგერის ბაზისთან

$$|x,t\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}tH}|x\rangle \tag{I-1.13}$$

ნათელია ახლა, რომ როცა $t_1 > t_2$,

$$\begin{aligned}{}_H\langle x_1,t_1|x_2,t_2\rangle_H &= \langle x_1|e^{-\frac{i}{\hbar}t_1H}e^{\frac{i}{\hbar}t_2H}|x_2\rangle = \langle x_1|e^{-\frac{i}{\hbar}(t_1-t_2)H}|x_2\rangle = \\ &= \langle x_1|U(t_1,t_2)|x_2\rangle = U(t_1,x_1;t_2,x_2)\end{aligned} \tag{I-1.14}$$

ამრიგად, დროში ევოლუციის ოპერატორის მატრიცული ელემენტები სხვა არაფერია, თუ არა დროის მიხედვით მოწესრიგებული გადასვლის ამპლიტუდები კოორდინატული ბაზისის მდგომარეობებს შორის ჰაიზენბერგის წარმოდგენაში.

ბუნებრივია, რომ ორივე წარმოდგენა ერთმანეთის ეკვივალენტურია სისტემის აღწერის თვალსაზრისით. მართლაც, კოორდინატის ოპერატორისათვის მიღებული თანაფარდობა (I-1.11) ზოგადია და გამოხატავს ამ ორ წარმოდგენაში კავშირს ნებისმიერი ოპერატორებისათვის. ამიტომ, თუ გამოვთვლით რაიმე $\hat{O}$ ოპერატორის საშუალო მნიშვნელობას, მიიღება ზემოთ ნათქვამი ეკვივალენტურობა. მართლაც,

$$\overline{\hat{O}}(t) = \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle = \langle\psi|e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\hat{O}e^{\frac{i}{\hbar}tH}|\psi\rangle, \tag{I-1.15}$$

რაც გამოხატავს $\hat{O}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\hat{O}e^{\frac{i}{\hbar}tH}$ ჰაიზენბერგის ოპერატორის საშუალოს ტოლობას შრედინგერის წარმოდგენის ოპერატორის საშუალოსთან.

ამავე დროს ჰაიზენბერგის ოპერატორი ემორჩილება დროზე დამოკიდებულ ჰაიზებერგის შემდეგ განტოლებას (მიიღება უბრალო გაწარმოებით)

$$i\hbar\frac{\partial\hat{O}(t)}{\partial t} = \left[H(t),\hat{O}(t)\right] \tag{I-1.16}$$

და ბოლოს, არსებობს კიდევ შუალედური, ე.წ. ***ურთიერთქმედების*** ანუ ***დირაკის*** წარმოდგენა.

მისი აღწერისათვის სრული ჰამილტონიანი წარმოვადგინოთ თავისუფალი H_0 ჰამილტონიანისა და ურთიერთქმედების H_I ჰამილტონიანის ჯამის სახით: $H = H_0 + H_I$, ხოლო მდგომარეობის ვექტორი ვეძებოთ შემდეგი ფორმით

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}|\Phi(t)\rangle. \tag{I-1.17}$$

ჩავსვათ (I-1.17) შრედინგერის სრულ განტოლებაში

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 + H_I)|\psi(t)\rangle$$

მიიღება

$$H_0e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}|\Phi(t)\rangle + i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}\frac{\partial|\Phi(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 + H_I)e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}|\Phi(t)\rangle,$$

საიდანაც გვაქვს შემდეგი განტოლება

$$i\hbar\frac{\partial|\Phi(t)\rangle}{\partial t}=e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}H_Ie^{\frac{i}{\hbar}tH_0}|\Phi(t)\rangle$$

თუ შემოვიყვანთ დირაკის წარმოდგენის ოპერატორებს ასე

$$\hat{O}_I(t)\equiv e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}\hat{O}e^{\frac{i}{\hbar}tH_0},$$

აღმოვაჩენთ, რომ ამ წარმოდგენის ტალღური ფუნქცია $|\Phi(t)\rangle$ აკმაყოფილებს შრედინგერის განტოლებას ურთიერთქმედების ჰამილტონიანით მარჯვენა მხარეში

$$i\hbar\frac{\partial|\Phi(t)\rangle}{\partial t}=H_I(t)|\Phi(t)\rangle \qquad \text{(I-1.18)}$$

აშკარაა, რომ ამ წარმოდგენაშიც ფიზიკურ ოპერატორებს აქვთ იგივე საშუალო მნიშვნელობები. მართლაც

$$\overline{O}(t)=\langle\Phi(t)|e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}\hat{O}e^{\frac{i}{\hbar}tH_0}|\Phi(t)\rangle=\langle\Phi(t)|\hat{O}_I(t)|\Phi(t)\rangle \qquad \text{(I-1.19)}$$

გარდა ამისა, ნათელია, რომ ამ ოპერატორებისათვის მოძრაობის განტოლებაც თავისებურია

$$i\hbar\frac{\partial\hat{O}_I(t)}{\partial t}=\left[H_0,\hat{O}_I(t)\right] \qquad \text{(I-1.20)}$$

ანუ ურთიერთქმედების წარმოდგენის ოპერატორები აკმაყოფილებენ მოძრაობის თავისუფალ განტოლებას. ამიტომაა, რომ ეს წარმოდგენა მოსახერხებელი აღმოჩნდა გაფანტვის მატრიცის თეორიაში შეშფოთების თეორიის სისტემატური მეთოდების გასავითარებლად. ყველა შემთხვევაში, კვანტური მექანიკის მთავარი მიზანი მდგომარეობს დროის ევოლუციის ოპერატორის მატრიცული ელემენტების აგებაში, რომელიც ჰაიზენბერგის წარმოდგენაში გამოვხატეთ კოორდინატულ საბაზისო მდგომარეობებში მატრიცული ელემენტებით.

ლიტერატურა I თავისათვის:

1. ი.შ. ვაშაკიძე, ვ.ი. მამასახლისოვი, გ.ა. ჭილაშვილი. “კვანტური მექანიკა”, თბ. 1978.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲔᲑᲘ:

1. *გამოთვალეთ გაუსის ინტეგრალი*

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

2. *გამოთვალეთ* $\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}ax^2}$

3. *გამოთვალეთ*

$$\langle x^\gamma\rangle\equiv\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dxx^\gamma e^{-\frac{1}{2}ax^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\frac{1}{2}ax^2}},\qquad \gamma=2n,$$

$$\gamma=2n-1$$

4. *გამოთვალეთ*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + jx}$$

4. *წარმოვიდგინოთ, რომ A არის ნამდვილი სიმეტრიული მატრიცა ელემენტებით A_{ij}, ხოლო x არის ვექტორი კომპონენტებით $x_i(i, j = 1,2,3,..., N)$. გამოთვალეთ*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 ... dx_N e^{-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + J_i x_i}$$

I-2 წირზე ინტეგრალები და კვანტური მექანიკა

– საბაზისო მდგომარეობები

გავიხსენოთ კიდევ რამდენიმე დებულება კვანტური მექანიკიდან.

განვიხილოთ კოორდინატის ოპერატორი, რომელიც აკმაყოფილებს საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას:

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle \qquad \text{(I-2.1)}$$

ეს საკუთარი მდგომარეობები განსაზღვრავენ ორთონორმირებულ ბაზისს. სახელდობრ, ისინი აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\begin{gathered} \langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \\ \int dx|x\rangle\langle x| = 1 \end{gathered} \qquad \text{(I-2.2)}$$

ანალოგიურად იმპულსის ოპერატორი საკუთარ წარმოდგენაში გვაძლევს თანაფარდობებს

$$\begin{gathered} \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle \\ \langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \\ \int dp|p\rangle\langle p| = 1 \end{gathered} \qquad \text{(I-2.3)}$$

კოორდინატული და იმპულსური ბაზისების შინაგანი (სკალარული) ნამრავლი იძლევა გადასვლის მატრიცულ ელემენტს ამ ორ წარმოდგენას შორის:

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} = \langle x|p\rangle^* \qquad \text{(I-2.4)}$$

ეს თანაფარდობები განსაზღვრავს ფურიე-გარდაქმნას, სახელდობრ, ბაზისების სისრულისა და ორთონორმირების გამოყენებით ნებისმიერი ფუნქციის ფურიე გარდაქმნა შეიძლება ასე განვმარტოთ:

$$f(x) = \langle x|f\rangle = \int dp\langle x|p\rangle\langle p|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp e^{\frac{i}{\hbar}px} f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk e^{ikx}\tilde{f}(k)$$

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\hbar} f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx e^{-ikx} f(x) \qquad \text{(I–2.5)}$$

ამ ფორმულებით მარტივად გადავიყვანთ ფუნქციას მოცემული სივრციდან მის შეუღლებულ ანუ დუალურ სივრცეში.

ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ ჰაიზენბერგის მდგომარეობები მარტივად უკავშირდებოდა შრედინგერის მდგომარეობებს. კოორდინატულ ბაზისში, მაგალითად, გვაქვს:

$$\left|x,t\right\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}tH}\left|x\right\rangle$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$_H\left\langle x,t\middle|x',t\right\rangle_H = \left\langle x\middle|e^{-\frac{i}{\hbar}tH}e^{\frac{i}{\hbar}tH}\middle|x'\right\rangle = \left\langle x\middle|x'\right\rangle = \delta(x-x') \qquad \text{(I-2.6)}$$

და

$$\int dx\left|x,t\right\rangle_{H\,H}\left\langle x,t\right| = 1 \qquad \text{(I-2.7)}$$

ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ორთონორმირება ჰაიზენბერგის მდგომარეობებისათვის ძალაშია მხოლოდ <u>დროის ერთიდაიგივე მომენტებისათვის.</u>

– **ოპერატორთა მოწესრიგება**

კვანტურ მექანიკაზე გადასვლა ჰამილტონის ფორმალიზმში ხდება ოპერატორებზე გადასვლით

$$H(x,p) \to H(\hat{x},\hat{p}) \qquad \text{(I-2.8)}$$

მაგრამ ეს წესი არ აკონკრეტებს თუ როგორ უნდა მოვექცეთ არაკომუტირებადი ოპერატორების, მაგ., x და p ნამრავლს. კლასიკურ ფიზიკაში ვიცით, რომ

$$xp = px\,,$$

ამიტომ აქ მათ მიმდევრობას სხვადასხვა წევრებში არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს. კვანტურ მექანიკაში კი ოპერატორთა მიმდევრობა არსებითია და აპრიორულად არ არის ნათელი რა ეთანადება xp ნამრავლს კვანტურ მექანიკაში. ეს არის ოპერატორთა მოწესრიგების პრობლემა. სამწუხაროდ არ არსებობს ცალსახად განსაზღვრული რეცეპტი, რომელიც გვეტყვოდა რა რიგით უნდა დავსვათ ოპერატორები კვანტურ მექანიკაზე გადასვლისას. ამავე დროს არსებობს სხვადასხვა წესები, რომლებიც გამოიყენება ასეთ შემთხვევებში. ასე, მაგალითად, **ნორმალური მოწესრიგება:**

ამ წესის თანახმად კოორდინატისა და იმპულსის ნამრავლში იმპულსი უნდა იდგეს კოორდინატის წინ, ანუ

$$xp \xrightarrow{N.O.} px$$

$$px \xrightarrow{N.O.} px$$

$$xp^2 \xrightarrow{N.O.} px^2$$

$$xpx \xrightarrow{N.O.} px^2 \quad \text{და ა.შ.} \qquad \text{(I-2.9)}$$

გარდა ნორმალური მოწესრიგებისა, ყველაზე ხშირად გამოიყენება ე.წ. **ვეილის მოწესრიგება.** ამ შემთხვევაში ხდება ნამრავლის სიმეტრიზაცია ყველა შესაძლო კომბინაციების მიხედვით ერთნაირი წონით, ე.ი.

$$xp \xrightarrow{W.O.} \frac{1}{2}(xp+px)$$

$$px \xrightarrow{W.O.} \frac{1}{2}(xp+px)$$

$$x^2 p \overset{W.O.}{\rightarrow} \frac{1}{3}\left(x^2 p + xpx + px^2\right)$$
$$xpx \overset{W.O.}{\rightarrow} \frac{1}{3}\left(x^2 p + xpx + px^2\right) \qquad \text{(I-2.10)}$$

და ა.შ.

ნორმალური მოწესრიგებისას ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი კვანტური ჰამილტონიანი H არის:

$$\langle x'|H^{N.O.}|x\rangle = \int dp\langle x'|p\rangle\langle p|H^{N.O.}|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p(x-x')} H(x,p) \qquad \text{(I-2.11)}$$

სადაც გამოყენებულია იმპულსის ოპერატორის ბაზისის სისრულე და განმარტებები.

ვეილის მოწესრიგების დეტალებში გასარკვევად განვიხილოთ გაშლა:

$$(\alpha x + \beta p)^N = \sum_{n+m=N} \frac{N!}{n!m!}\alpha^n \beta^m \left(x^n p^m\right)^{W.O.} \qquad \text{(I-2.12)}$$

ამრიგად, თუ ნიუტონის ბინომის ფორმულას გამოვიყენებთ იმ დაშვებით, რომ x და p ოპერატორები არ კომუტირებენ ერთმანეთთან, ნიუტონის ბინომი ბუნებრივად გენერირებს ვეილის მოწესრიგების ნამრავლებს $x^n p^m$ ფორმით.

ამოცანა: დაამტკიცეთ (I-2.12) ფორმულა.

ცხადია, რომ $\exp(\alpha x + \beta p)$ ექსპონენტის გაშლისას გენერირდება ბინომიალური ხარისხები და ამრიგად ამ ექსპონენტის მატრიცული ელემენტების განხილვით შევისწავლით ვეილის წესით მოწესრიგებული ჰამილტონიანის მატრიცულ ელემენტებს.

იმის გამო, რომ $[x,p] = i\hbar = const,$ გამოვიყენოთ ბეიკერ-ჰაუსდორფ-კემბპელის ფორმულა

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

ამოცანა: დაამტკიცეთ ბჰკ თეორემა: თუ $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, მაშინ ადგილი აქვს თანაფარდობას (ბჰკ ფორმულას): $\exp A \cdot \exp B = \exp\left\{\frac{1}{2}[A,B]\right\}\exp(A+B)$

ჩვენთვის საინტერესოა შემდეგი ნამრავლის განხილვა:

$$\exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right)\exp(\beta\hat{p})\exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right)\exp\left(\beta\hat{p} + \frac{\alpha\hat{x}}{2} - i\hbar\frac{\alpha\beta}{4}\right) =$$
$$= \exp\left(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p} - i\hbar\frac{\alpha\beta}{4} + i\hbar\frac{\alpha\beta}{4}\right) = \exp(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p}) \qquad \text{(I-2.13)}$$

ამ თანაფარდობის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\langle x'|\exp(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})|x\rangle = \langle x'|\exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right)\exp(\beta\hat{p})\exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right)|x\rangle =$$
$$= \int dp\langle x'|\exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right)\exp(\beta\hat{p})|p\rangle\langle p|\exp\left(\frac{\alpha\hat{x}}{2}\right)|x\rangle = \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p(x-x')\right\}\exp\left\{\frac{\alpha(x+x')}{2} + \beta p\right\}$$

აქ კვლავ სისრულე და წინა თანაფარდობებია გამოყენებული. შევნიშნოთ, რომ ბოლო ტოლობა ჩვეულებრივ რიცხვებზე – საკუთარ მნიშვნელობებზე გადასვლით მიიღება. ამიტომ ბოლოს მხოლოდ საკუთარი მნიშვნელობები დგას – ოპერატორებისაგან მთლიანად გავთავისუფლით. ამ ფორმულის თანახმად

ვეილის წესით მოწესრიგებული ჰამილტონიანის მატრიცული ელემენტისათვის უნდა გვქონდეს:

$$\langle x'|H^{W.O.}|x\rangle=\int\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}p(x-x')}H\left(\frac{x+x'}{2},p\right) \qquad \text{(I-2.14)}$$

ამრიგად, ვხედავთ, რომ ვეილის წესით მოწესრიგებული ჰამილტონიანის მატრიცული ელემენტები მიიყვანებიან კარგად ცნობილ საშუალედო წერტილის მიწერაზე. ახლა ყველაფერი მზადაა გადასვლის ამპლიტუდის მატრიცული ელემენტის გამოსათვლელად.

– გადასვლის ალბათობის გამოთვლა:

გავიხსენოთ, რომ ჰაიზენბერგის სურათში გვაქვს

$$U(t_f,x_f;t_i,x_i)={}_H\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_H \qquad (t_f>t_i)$$

დროის ინტერვალი საწყის და საბოლოო მომენტებს შორის დავყოთ N ტოლ სეგმენტად უსასრულოდ მცირე სიგრძით ε. სახელდობრ,

$$\varepsilon=\frac{t_f-t_i}{N} \qquad \text{(I-2.15)}$$

ამრიგად, სიმარტივისთვის ვახდენთ დროის ინტერვალის დისკრეტიზებას და ბოლოს გადავალთ ზღვარზე $\varepsilon\to 0$ და $N\to\infty$, ისე, რომ (I-2.15) დარჩეს ძალაში. დავნომროთ შუალედური მომენტებიც, ვთქვათ, ასე:

$$t_n=t_i+n\varepsilon, \qquad n=1,2,...,N-1 \qquad \text{(I-2.16)}$$

და შემოვიტანოთ კოორდინატული ბაზისის სრული სისტემა შუალედური დროის მომენტებით. მივიღებთ

$$U(t_f,x_f;t_i,x_i)={}_H\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_H=\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\int dx_1dx_2...dx_{N-1}\times \qquad \text{(I-2.17)}$$

$$\times{}_H\langle x_f,t_f|x_{N-1},t_{N-1}\rangle_H\,{}_H\langle x_{N-1},t_{N-1}|x_{N-2},t_{N-2}\rangle_H....{}_H\langle x_1,t_1|x_i,t_i\rangle_H$$

ამ თანაფარდობის ჩაწერისას ჩვენ ვგულისხმობდით დროში მოწესრიგებას მარცხნიდან მარჯვენისკენ: $t_f>t_{N-1}>....>t_2>t_1>t_i$. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუმცა აქ გვაქვს N შინაგანი ნამრავლი, ტარდება მხოლოდ $N-1$ შუალედური ინტეგრაცია, რადგან ამდენია დაყოფის წერტილი მთელი დროის ინტერვალის N ნაწილად დაყოფისას.

ცალკეულ შინაგან ნამრავლს აქვს სახე:

$$\begin{aligned}{}_H\langle x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}\rangle_H&=\langle x_n|e^{-\frac{i}{\hbar}t_nH}e^{\frac{i}{\hbar}t_{n-1}H}|x_{n-1}\rangle=\langle x_n|e^{-\frac{i}{\hbar}(t_n-t_{n-1})H}|x_{n-1}\rangle=\\&=\langle x_n|e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H}|x_{n-1}\rangle=\int\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}p_n(x_n-x_{n-1})-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H\left(\frac{x_{n+x}+x_n}{2},p_n\right)}\end{aligned} \qquad \text{(I-2.18)}$$

სადაც გამოვიყენეთ საშუალედო წერტილის მიწერა ვეილის მოწესრიგების შესაბამისად.

ჩავსვათ ეს ფორმულა გადასვლის ამპლიტუდაში, ვიპოვით

$$U(t_f,x_f;t_i,x_i)=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\N\to\infty}}\int dx_1...dx_{N-1}\frac{dp_1}{2\pi\hbar}...\frac{dp_N}{2\pi\hbar}\times\exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\left\{p_n(x_n-x_{n-1})-\varepsilon H\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2},p_n\right)\right\} \qquad \text{(I-2.19)}$$

ამ ფორმულის, ისევე როგორც წინა ფორმულის ჩაწერისას ჩათვლილია, რომ

$$x_0 = x_i \qquad \text{და} \qquad x_N = x_f$$

ეს არის **ფეინმანის წირზე ინტეგრალის** <u>წინასწარი ფორმა</u>, რომელიც განსაზღვრულია ფაზურ სივრცეში. არსებითია შევნიშნოთ კიდევ ერთხელ, რომ კოორდინატების მიხედვით ინტეგრაციების რაოდენობა ერთით განსხვავდება იმპულსებით ინტეგრაციების რაოდენობისაგან.

შევნიშნოთ, რომ $\varepsilon \to 0$ უწყვეტ ზღვარში წინა განტოლების ფაზური ფაქტორი ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\left\{p_n\left(x_n - x_{n-1}\right) - \varepsilon H\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, p_n\right)\right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon\left\{p_n \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} - H\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, p_n\right)\right\} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left\{p\dot{x} - H(x,p)\right\} = \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L dt \qquad \text{(I-2.20)}$$

ამრიგად, გამოდის, რომ ეს ფაზური ფაქტორი პროპორციულია ქმედებისა შერეული ცვლადებით ანუ კოორდინატით და იმპულსით.

წირზე ინტეგრალის ფეინმანისეული ფორმის მისაღებად ეს უნდა გადაიწეროს მხოლოდ კონფიგურაციულ სივრცეში ანუ უნდა ჩატარდეს ინტეგრაციები იმპულსებით. ამას ვერ გავაკეთებთ, სანამ არ დავაკონკრეტებთ ჰამილტონიანს. ჰამილტონიანის ტრადიციული სახე კვანტურ მექანიკაში შეიცავს კვადრატულ ფორმას იმპულსის მიხედვით. ამიტომ ავირჩიოთ

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad \text{(I-2.21)}$$

ე.ი. ამ ჰამილტონიანში კოორდინატები და იმპულსები განცალებულია და ამიტომ, იმპულსებით ინტეგრაცია ჩატარდება ტრივიალურად. გვაქვს:

$$U\left[t_f, x_f; t_i, x_i\right] = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int dx_1 ... dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar}...\frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\left\{p_n\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} - \frac{p_n^2}{2m} - V\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, p_n\right)\right\}$$

იმპულსის მიხედვით ინტეგრალები აქ არის გაუსის ტიპისა და მათი აღება ადვილად შეგვიძლია. შევნიშნოთ, რომ

$$\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{p_n^2}{2m} - \frac{p_n\left(x_n - x_{n-1}\right)}{\varepsilon}\right)\right] = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}\left(p_n^2 - \frac{2mp_n\left(x_n - x_{n-1}\right)}{\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}\left(p_n - \frac{m\left(x_n - x_{n-1}\right)}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{m\left(x_n - x_{n-1}\right)}{\varepsilon}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar m}{i\varepsilon}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im\varepsilon}{2\hbar}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2\right] = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{1/2}\exp\frac{im\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2$$

თუ ამას გამოვიყენებთ წინა ფორმულაში, ე.ი. ავიღებთ იმპულსურ ინტეგრალებს, მიიღება:

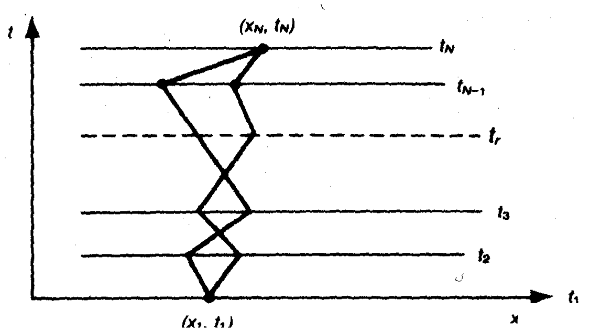
$$U\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2}\int dx_1 ... dx_{N-1}\exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2 - V\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\right]\right\} \equiv$$

$$\equiv A\int Dx e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right)} = A\int Dx e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} \qquad \text{(I-2.22)}$$

სადაც A არის სისტემის დინამიკაზე დამოუკიდებელი კონსტანტა და $S[x]$ არის სისტემის ქმედება.

(I-2.22) არის ფეინმანის კონტინუალური ინტეგრალი გადასვლის ამპლიტუდისათვის კვანტურ მექანიკაში.

მისი შინაარსის გასარკვევად ჯერ შევეცადოთ გავერკვეთ ინტეგრალის ზომის (Dx) შინაარსში. ამ ინტეგრაციის საბოლოო წერტილები არის ფიქსირებული და მხოლოდ შუალედური წერტილებით ხდება ინტეგრაცია მთელ სივრცეში. კოორდინატული წერტილების ნებისმიერი სივრცითი კონფიგურაცია იძლევა ტრაექტორიას საწყის და საბოლოო წერტილებს შორის. ამიტომ ყველა ასეთი კონფიგურაციით ინტეგრაცია (რაც სწორედ არის შუალედური წერტილებით ინტეგრაცია, რომელიც უნდა ჩატარდეს) ეკვივალენტურია ჯამისა ყველა წირით, რომელიც საწყის და საბოლოო წერტილებს აერთებს.



ნახაზი 5

ამიტომ ფეინმანის წირზე ინტეგრალი უბრალოდ გვეუბნება, რომ საწყის და საბოლოო მდგომარეობებს შორის გადასვლის ამპლიტუდა არის ჯამი ყველა წირზე, რომელიც ამ წერტილებს აერთებს, წონითი ფაქტორით $\left(\exp\frac{i}{\hbar}S[x]\right)$. კვანტური მექანიკის კურსიდან ცნობილია, რომ თუ პროცესი შეიძლება მოხდეს ბევრი სხვადასხვა გზით, მაშინ გადასვლის ამპლიტუდა არის თითოეული შესაძლო გზით გადასვლების ინდივიდუალური ამპლიტუდების ჯამი. ამიტომ სხვადასხვა გზებით ჯამს მოველოდით. აქ მოულოდნელი და მნიშვნელოვანია წონითი ფაქტორი $\left(\exp\frac{i}{\hbar}S[x]\right)$. სწორედ ეს ფაქტორი აქვს პოსტულირებული პ. დირაკს თავის წიგნში. ფეინმანის მიდგომაში ეს ფაქტორი გამოიყვანება.

აღსანიშნავია, რომ თუმცა საბოლოო შედეგი მივიღეთ სპეციალური ტიპის ჰამილტონიანებისათვის, მიღებული გამოსახულება ძალაშია საზოგადოდ. ისეთი ჰამილტონიანებისთვისაც, რომლებიც არ არიან კვადრატული იმპულსის მიხედვით, ოღონდ უნდა გამოვიჩინოთ სიფრთხილე ინტეგრაციის ზომის განმარტებისას.

I-3. კლასიკური ზღვარი

როგორც ქვემოთ ვნახეთ

$$U\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right) = A\int Dx e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} A_N \int dx_1 ... dx_{N-1} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\frac{m}{2}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2 - V\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)}$$

სადაც $A_N = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2}$

შევნიშნოთ, რომ წირებზე, რომელთათვისაც

$$x_n >> x_{n-1}$$

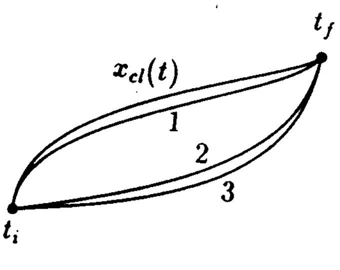
პირველი წევრი ექსპონენტაში იქნება საკმაოდ დიდი, იმ მიზეზით, რომ ε არის უსასრულოდ მცირე. ამიტომ ასეთ წევრებს ექნებათ ძალიან დიდი ფაზები და ამის გამო, წონითი ფაქტორი შეიძლება ადვილად გახდეს დადებითი ან უარყოფითი. სხვა სიტყვებით, ყველა ასეთი x_k-სთვის იარსებებს მეზობელი x_m, მცირედ განსხვავებული, რომელსაც ექნება შემკვეცი ეფექტი. ამიტომ ყველა ასეთი წვლილები ერთმანეთს გააბათილებს წირით ინტეგრალში.

გამოდის, რომ ყურადღება მხოლოდ იმ წირებზე უნდა გავამახვილოთ, რომლებიც ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავებულ კოორდინატებს შეიცავენ. ჩვენი ამოცანა აქ იქნება გავარკვიოთ, თუ როგორ ხდება, რომ ყველა წირებიდან, რომლებსაც წვლილი შეაქვთ გადასვლის ამპლიტუდაში, არსებობს მარტო ერთი წირი, რომელიც გამოიყოფა კლასიკურ ზღვარში, $\hbar \to 0$. შევნიშნოთ, რომ ფაქტორი $\exp\frac{i}{\hbar}S[x]$ არის ფაზა, რომელიც მრავლდება დიდ რიცხვზე, როცა $\hbar \to 0$.

მათემატიკურად ნათელია, რომ წირით ინტეგრალში დომინირებადი წვლილი წარმოიქმნება წირებიდან, რომლებიც უახლოესია ფაზური ფაქტორისათვის ექსტრემუმის მიმნიჭებელი წირისა. სხვა სიტყვებით, გადასვლის ამპლიტუდაში არსებით წვლილს შეიტანენ მარტო ის ტრაექტორიები, რომლებიც კლასიკურ ზღვარში ახლოსაა ექსტრემალურთან

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0$$

ე.ი. ესაა ტრაქტორია, რომელზეც ხდება კლასიკური მოძრაობა.



ნახაზი 6

სხვა სიტყვებით, მაგალითად, განვიხილოთ წირი 3, რომელიც საკმაოდ შორსაა კლასიკური ტრაექტორიიდან. მაშინ, რაკი $\hbar$ მცირეა, ამ ტრაექტორიის

გასწვრივ ფაზა იქნება საკმაოდ დიდი. ყოველი ასეთი წირისათვის მოიძებნება ახლომდებარე წირი, ვთქვათ 2, რომელზეც ქმედება მცირედ განსხვავებულია, მაგრამ მრავლდება დიდ რიცხვზე $\hbar^{-1}$და წარმოიქმნება კვლავ დიდი ფაზა. ყველა ასეთი ფაზების ჯამი საშუალოდ ნულის ტოლია.
ამიტომ თუ ავირჩევთ წირს, რომელიც უსასრულოდ ახლოსაა კლასიკურ წირთან, რომელზეც ფაზა ხდება სტაციონარული, ქმედება თითქმის არ შეიცვლება. ყველა ასეთი წირი შეიკრიბება კოჰერენტულად და მოგვცემს დომინანტ წვლილს ზღვარში, როცა $\hbar \to 0$.

ამრიგად, ამიტომაა, რომ კლასიკურ ზღვარში გამოიყოფა კლასიკური ტრაექტორია. იმიტომ კი არა, რომ ის იძლევა ყველაზე მეტ წვლილს, არამედ იმიტომ, რომ მასთან უსასრულოდ ახლო მდებარე წირები იკრიბებიან კოჰერენტულად.

კლასიკური წირი ისეა მოწყობილი, რომ ქმედება S არ იცვლება კლასიკური ტრაექტორიის მახლობლად პირველ რიგში, ე.ი. $S/\hbar$ ფაზა მუდმივი რჩება კლასიკური წირის უსასრულოდ მცირე მახლობლობაში. ამ მახლობლობის გარეთ ფაზა სწრაფად იცვლება, ამიტომ სათანადო ამპლიტუდები დესტრუქციულ ინტერფერენციას განიცდიან. რადგან მთავარი წვლილი პროპაგატორში მოდის კლასიკური წირის მახლობელ უსასრულოდ მცირე ზოლიდან, ტიპიურ კლასიკურ ამოცანაში ზოლი არის ძალიან “ვიწრო”, მაგრამ კვანტურ მექანიკაში ზოლი ძალიან “განიერია”. სათანადოდ კლასიკური წირი კარგავს თავის მნიშვნელობას კვანტურ მექანიკურ სიტუაციაში.

I-4. ეკვივალენტურობა შრედინგერის განტოლებასთან

ახლა ვნახოთ შრედინგერის განტოლების ადგილი ფეინმანის წირითი ინტეგრალის ფორმალიზმში. სახელდობრ, აპრიორულად არ არის ნათელი, აღვადგენთ თუ არა დროზე დამოკიდებულ შრედინგერის განტოლებას ამ ფორმალიზმში.

გავიხსენოთ, რომ შრედინგერის განტოლება არის დიფერენციალური განტოლება. ის აღწერს ტალღური ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ცვლილებებს. ამიტომ უნდა შევისწავლოთ წირებზე ინტეგრალის ინფინიტეზიმალური ფორმა.

წირითი ინტეგრალის ზემოთ მოყვანილი ცხადი გამოსახულებიდან უსასრულოდ მცირე ε-სათვის ვპოულობთ

$$U\left(t_f=\varepsilon, x_f; t_i=0, x_i\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_f-x_i}{\varepsilon}\right)^2-V\left(\frac{x_f-x_i}{2}\right)\right]} \qquad \text{(I-4.1)}$$

აქ შენარჩუნებულია სიმცირის მიხედვით პირველი რიგი, ε^1.
ვიცით, რომ გადასვლის ამპლიტუდა არის პროპაგატორი შემდეგი შინაარსით:

$$\psi(x,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty} U(\varepsilon, x; 0, x')\psi(x',0)$$

ჩავსვათ აქ U, მიიღება

$$\psi(x,\varepsilon)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(x-x')^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(\frac{x+x'}{2}\right)}\psi(x',0) \qquad \text{(I-4.2)}$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი

$$\eta = x' - x \qquad \text{(I-4.3)}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\psi(x,\varepsilon)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(x+\frac{\eta}{2}\right)}\psi(x+\eta,0) \qquad \text{(I-4.4)}$$

ნათელია, რომ რაკი ε არის ინფინიტეზიმალური, თუ η იქნებოდა დიდი, ექსპონენტაში პირველ წევრს ექნებოდა სწრაფი ოსცილაციები და ასეთი წევრი ნულად გასაშუალოვდებოდა კონტინუალურ ინტეგრალში მომდევნო ნაბიჯების გადადგმისას. ამიტომ მთავარი წვლილი ინტეგრალში მოვა შემდეგი არიდან:

$$0\le|\eta|\le\left(\frac{2\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \qquad \text{(I-4.5)}$$

ამ დროს პირველ ექსპონენტში ცვლილება არის ერთის რიგისა. ამიტომ შეგვიძლია ტეილორის მწკრივად გავშალოთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება და რაკი ინფინიტეზიმალური ყოფაქცევა გვაინტერესებს, შევინარჩუნოთ წევრები ε- რიგამდე:

$$\psi(x,\varepsilon)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}\left[1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(x+\frac{\eta}{2}\right)\psi(x+\eta,0)\right]=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}\left(1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)+O(\varepsilon^2)\right)\cdot(\psi(x,0)+\eta\psi'(x,0)+\frac{\eta^2}{2}\psi''(x,0)+O(\eta^3))=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}\left[\psi(x,0)-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,0)+\eta\psi'(x,0)+\frac{\eta^2}{2}\psi''(x,0)+O(\eta^3,\varepsilon^2)\right]$$

აქ დარჩენილი ცალკეული ინტეგრალები გაუსის ტიპისაა და მათი გამოთვლა ადვილად შეგვიძლია. სახელდობრ:

$$\bullet\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}=\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}$$

$$\bullet\bullet\int_{-\infty}^{\infty}\eta d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}=0 \qquad \text{(I-4.6)}$$

$$\bullet\bullet\bullet\quad\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2 d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}=\frac{i\hbar\varepsilon}{m}\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}$$

ამ ინტეგრალების აღებისას ვსარგებლობთ პირველი ინტეგრალის გაწარმოებით პარამეტრის მიხედვით, აგრეთვე იმ ფუნდამენტური თვისებით, რომ კენტი ფუნქციიდან სიმეტრიულ საზღვრებში ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამავე დროს გამოყენებულია შემდეგი სახის რეგულარიზაცია (ეს აუცილებელია, რადგან ინტეგრალქვეშ გვაქვს ოსცილირებადი სიდიდეები):

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\eta^2}=\lim_{\delta\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}-\delta\right)\eta^2}=\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{\pi}{\delta-\frac{im}{2\hbar\varepsilon}}\right)^{1/2}=\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \qquad \text{(I-4.7)}$$

ამ ინტეგრაციების გათვალისწინება წინა ფორმულაში მოგვცემს:

$$\psi(x,\varepsilon)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\left[(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m})^{1/2}\left(\psi(x,0)-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,0)\right)+\frac{i\hbar\varepsilon}{2m}\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}\psi''(x,0)+O(\varepsilon^2)\right]=$$

$$=\psi(x,0)+\frac{i\hbar\varepsilon}{2m}\psi''(x,0)-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x,0)+O(\varepsilon^2)$$

ზღვარში $\varepsilon\to 0$ ვღებულობთ დროზე დამოკიდებულ შრედინგერის განტოლებას:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi(x,t) \qquad \text{(I-4.8)}$$

ამრიგად, წირზე ინტეგრალური წარმოდგენა შეიცავს შრედინგერის განტოლებას და ინფინიტეზიმალურად მისი ეკვივალენტურია.

უნდა აღინიშნოს, რომ ფეინმანის მიდგომა არც ისე მოსახერხებელია პრაქტიკული მიზნებისათვის. მაგრამ კონცეპტუალური შინაარსით ის მეტად მნიშვნელოვანია. როგორც ვნახეთ, კონტინუალურ ინტეგრალში პასუხი ჩაწერილია კლასიკური ფიზიკისათვის დამახასიათებელი სიდიდეებით – ტრაექტორია, ლაგრანჟიანი, ქმედება და ა.შ. ამიტომ დაისმის ბუნებრივი კითხვა: სად არის ჩამალული კვანტური მექანიკა? პასუხი შემდეგშია: **კვანტური მექანიკა ნიშნავს უსასრულო (უწყვეტ) აჯამვას ყველა ტრაექტორიების მიხედვით, ე.ი. აქ მონაწილეობს ყველა შესაძლო ტრაექტორია და არა მარტო ერთი (კლასიკური) ტრაექტორია. პრაქტიკულად ტრაექტორიების განუზღვრელობა, რაც დამახასიათებელია კვანტური მექანიკისათვის, წირითი ინტეგრალის ფორმულირებაში მთავარ როლს ასრულებს.**

მეთოდის დადებითი მხარე იმაში მდგომარეობს, რომ შენარჩუნებულია კლასიკური მექანიკისათვის დამახასიათებელი ცნებები, რაც უფრო ნათელს და გამჭვირვალეს ხდის ამოცანების ფორმულირებას და ლაგრანჟისა და ჰამილტონის მეთოდების სრული გამოყენების საშუალებას იძლევა.

ახლა გავერკვეთ კიდევ ერთ პრობლემაში: <u>როგორ უნდა მოვიქცეთ, როცა ჰამილტონიანი არ არის განცალებადი ფორმისა,</u> (I-2.21)? ამ დროს გადასვლის ამპლიტუდის (I-2.20) გამოსახულება გამოიყენება ე.წ. ეფექტური ქმედების ასაგებად, რომელიც არ ემთხვევა ქმედების ჩვეულებრივ გამოსახულებას.

მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი არაწრფივი ლაგრანჟიანი

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2 f(q) \qquad \text{(I-4.9)}$$

სადაც $f(q)$ არის q-ს არასინგულარული ფუნქცია. ეს ლაგრანჟიანი აღწერს სისტემების კერძო კლასს, როცა პოტენციალი დამოკიდებულია სიჩქარეზე. კანონიკურად შეუღლებული იმპულსი ასე გამოითვლება

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\dot{q}f(q)$$

ხოლო ჰამილტონიანია

$$H(P,q)=p\dot{q}-L=\frac{1}{2}p^2\left[f(q)\right]^{-1}$$

განმარტების თანახმად გადასვლის ამპლიტუდა ტოლია

$$U(t_f,q_f;t_i,q_i)=\int\Pi dq_n\,\Pi\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\left\{p_n(q_n-q_{n-1})-\varepsilon p_n^2\left[f\left(\frac{q_n+q_{n+1}}{2}\right)\right]^{-1}\right\}}$$

იმპულსით ინტეგრაცია ისევე ჩატარდება. მივიღებთ:

$$U\left(t_f, q_f; t_i, q_i\right) = \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n}{\left(2\pi i\hbar\varepsilon\right)^{1/2}} e^{\frac{\bar{i}}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2 f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right)} \times \qquad \text{(I-4.10)}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N}\left[f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right)\right]^{1/2}$$

უკანასკნელი მამრავლი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\prod_n \left[f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right)\right]^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_n \ln f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2\varepsilon}\sum_n \varepsilon \ln f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right)\right] \Rightarrow \exp\left[\frac{1}{2}\delta(0)\int dt \ln f(q)\right] \qquad \text{(I-4.11)}$$

სადაც გამოყენებულია შემდეგი ზღვრული გადასვლები

$$\sum_n \varepsilon \to \int dt, \qquad \frac{1}{\varepsilon}\delta_{nm} \to \delta(t_n - t_m) \qquad \text{(I-4.12)}$$

საბოლოოდ (I-4.10) გამოსახულება ასე გადაიწერება:

$$U\left(t_f, q_f; t_i, q_i\right) = \lim_{N\to\infty}\int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n}{\left(2\pi i\varepsilon\hbar\right)^{1/2}} \cdot$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2 f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right) - \frac{i}{2\varepsilon}\ln f\left(\frac{q_n + q_{n-1}}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n}{\left(2\pi i\varepsilon\hbar\right)^{1/2}} \exp\left(iS_{eff}\right), \qquad \text{(I-4.13)}$$

სადაც

$$S_{eff} = \int dt \left[L(q, \dot{q}) - \frac{i}{2}\delta(0)\ln f(q)\right] = \int dt L_{eff}(q, \dot{q}) \qquad \text{(I-4.14)}$$

ეს შედეგი პირველად მიიღეს **ლიმ და იანგმა**;

Lee T.D. and Yang C.N. **Phys. Rev., 128, 885 (1962).**

როდესაც გამოთვლები ტარდება ამ ქმედებით (ან ლაგრანჟიანით), წარმოიქმნება უსასრულო წევრები, რომლებიც შეკვეცავენ (I-4.13)-ში ცხადად სიმბოლური სახით ამოწერილ $\delta(0)$ წევრს. როცა ატარებენ გამოთვლებს, შეიძლება დავუბრუნდეთ უკან (I-4.13) გამოსახულებას ცხადი სახით $N \to \infty$ ზღვარზე გადასვლამდე, ჩავატაროთ q_n-ინტეგრაციები და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე $N \to \infty$.

თავი II. წირზე ინტეგრალების გამოთვლის უმარტივესი მაგალითები

შევნიშნოთ, რომ წირზე ინტეგრალი არის ფუნქციონალური ინტეგრალი. სახელდობრ, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, რომელიც ფაზურ ფაქტორს წარმოადგენს, არის ტრაექტორიების ფუნქციონალი საწყის და საბოლოო წერტილებს შორის. რადგან საზოგადოდ შეუძლებელია ასეთი სიდიდეების მიხედვით აპელირება, უნდა შესწავლილ იქნას ცალკეული მარტივი სისტემები.

განვიხილოთ ზოგიერთი ტიპიური მაგალითი:

II-1. თავისუფალი ნაწილაკი

თავისუფალი ნაწილაკი არის უმარტივესი კვანტურ-მექანიკური სისტემა. მის ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2} \qquad \text{(II-1.1)}$$

ამიტომ, განმარტების თანახმად უნდა გამოითვალოს შემდეგი გადასვლის ამპლიტუდა:

$$U\left(t_f,x_f;t_i,x_i\right)=$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{N/2}\int dx_1\ldots dx_{N-1}e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\frac{m}{2}\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^2} \qquad \textbf{(II-1.2)}$$

შემოვიტანოთ ცვლადი

$$y_n=\left(\frac{m}{2\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}x_n$$

მაშინ წინა გამოსახულება ასე გადაიწერება:

$$U\left(t_f,x_f;t_i,x_i\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2}\left(\frac{2\hbar\varepsilon}{m}\right)^{(N-1)/2}\int dy_1\ldots dy_{N-1}e^{i\sum_{n=1}^{N}\left(y_n-y_{n-1}\right)^2} \qquad \text{(II-1.3)}$$

ეს კი არის გაუსის ინტეგრალი, რომლის გამოთვლა შეგვიძლია სხვადასხვა გზით. ჩვენ გამოვიყენოთ უმარტივესი ინდუქციის მეთოდი. ჯერ შევნიშნოთ, რომ

$$\int dy_1\exp\left\{i\left[\left(y_1-y_0\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2\right]\right\}=$$
$$=\int dy_1\exp\left\{i\left[2\left(y_1-\frac{y_0+y_2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(y_2-y_0\right)^2\right]\right\}=$$
$$=\left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2}\exp\left\{i\left(y_2-y_0\right)^2\right\} \qquad \text{(II-1.4)}$$

ვხედავთ, რომ ინტეგრაციამ ამოაგდო შუალედური ცვლადი და კვლავ გაუსიანი დატოვა.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ფორმულა (**Л.Райдер. Квантовая теория поля.стр.214):**

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... dx_n \exp\left\{ i\lambda \left[(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1)^2 + ... + (b - x_n)^2 \right] \right\} =$$

$$= \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n} \right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1} (b-a)^2 \right] \qquad \text{(II-1.5)}$$

მტკიცება მიდის ინდუქციის მეთოდით: დავუშვებთ, რომ ეს ფორმულა სამართლიანია რაიმე n-ისათვის და უნდა დავამტკიცოთ, რომ ძალაში რჩება, როცა გადავდივართ $(n+1)$-ზე.

გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i\lambda \left[(x_1 - a)^2 + ... + (b - x_{n+1})^2 \right] \right\} dx_1 ... dx_{n+1} =$$

$$= \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n} \right]^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1} (x_{n+1} - a)^2 \exp\left[i\lambda (b - x_{n+1})^2 \right] \right] dx_{n+1} =$$

აქ კი შეგვიძლია ვიმოქმედოთ ისე, როგორც (II-1.4)-ში. შემოგვაქვს ცვლადი $y = x_{n+1} - a$. მაშინ კვადრატულ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{n+1} y^2 + (-a - y)^2 = \frac{n+2}{n+1} y^2 - 2y(b-a) + (b-a)^2 =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \left[y - \frac{n+1}{n+2} (b-a) \right]^2 + \frac{1}{n+2} (b-a)^2$$

ახლა ჩავსვათ $y - \dfrac{(n+1)(b-a)}{n+2} = z$ მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის ინტეგრალს

$$\left(\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda \frac{n+2}{n+1} z^2 + \frac{i\lambda}{n+2} (b-a)^2 \right] dz =$$

$$= \left[\frac{i^{n+1} \pi^{n+1}}{(n+2)\lambda^{n+1}} \right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+2} (b-a)^2 \right],$$

რაც თანხვდება (II-1.5)-ს, როცა იქ შეცვლილია $n \to n+1$. რაც შეეხება კერძო შემთხვევას $n=1$, ამ დროსაც სამართლიანია ეს ფორმულა, რაც ჩანს (II-1.4)-დან. ამრიგად, (II-1.5) თანაფარდობა დამტკიცებულია.

ამიტომ თავისუფალი ნაწილაკის პროპაგატორი გამოდის

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = \left[\frac{m}{2\pi i\hbar (t_f - t_i)} \right]^{1/2} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[x_{cl}] \right\} \qquad \text{(II-1.6)}$$

სადაც

$$S[x_{cl}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 (t_f - t_i). \qquad \text{(II-1.7)}$$

ეს იმიტომ, რომ თავისუფალი ნაწილაკის სიჩქარე მუდმივია. რაკი

$$\upsilon = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

ამის გამო

$$S[x_{cl}] = \frac{m}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i} \qquad \text{(II-1.8)}$$

გადასვლის ამპლიტუდის ამ ცხადი სახიდან გამომდინარეობს, რომ პროპაგატორი აკმაყოფილებს თავისუფალი ნაწილაკის შრედინგერის დროით განტოლებას

$$i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x_f^2}$$

ხშირად გამოთვლის სხვა მეთოდებიც გამოიყენება. ქვემოთ აღვწერთ ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ მიდგომას საილუსტრაციოდ, რომელიც განსაკუთრებით ეფექტურია კვადრატული ლაგრანჟიანების შემთხვევაში.

წარმოვადგინოთ ნებისმიერი წირი ასე

$$x(t)=x_{cl}(x)+y(t) \tag{II-1.9}$$

ანუ როგორც კლასიკური წირი და მისგან გადახრა. კლასიკური წირი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას აკმაყოფილებს. გადახრას კი უნდა მოეთხოვოს შემდეგი სასაზღვრო პირობის შესრულება

$$y(t_i)=y(t_f)=0 \tag{II-1.10}$$

ჩავსვათ ეს წარმოდგენა საწყის ლაგრანჟიანში (II-1.1) და გავშალოთ ლაგრანჟიანი ასე

$$L(\dot x)=L(\dot x_{cl}+\dot y)=L(x_{cl})+\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{x_{cl}}\dot y+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\dot x\partial\dot x}\right|_{x_{cl}}\dot y^2$$

რადგან ლაგრანჟიანი მხოლოდ მეორე ხარისხისაა, ეს გაშლა არის ზუსტი, ამიტომ ქმედებას ასე ჩავწერთ:

$$S=\int_{t_i}^{t_f}dt\left[L(x_{cl})+\left.\frac{\partial L}{\partial\dot x}\right|_{x_{cl}}\dot y+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\dot x\partial\dot x}\right|_{x_{cl}}\dot y^2\right]$$

მეორე წევრში გამოვიყენოთ თანაფარდობა

$$\int_{t_i}^{t_f}dt\left.\frac{\partial L}{\partial\dot x}\right|_{x_{cl}}\dot y=\left[\left.\frac{\partial L}{\partial\dot x}\right|_{x_{cl}}y(t)\right]_{t_i}^{t_f}-\int_{t_i}^{t_f}dt\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial\dot x}\right|_{x_{cl}}\right)y$$

ბოლო წევრი მოძრაობის განტოლების გამო პროპორციულია ნაწილაკის აჩქარებისა და ამიტომ, ნულის ტოლია. ამ თანაფარდობაში პირველი წევრიც ნულის ტოლია (I-1.10) სასაზღვრო პირობის გამო. ამიტომაც პირველი წარმოებული საერთოდ ამოვარდება და დაგვრჩება

$$S=S_{cl}+\frac{m}{2}\int_{t_i}^{t_f}dt\dot y^2 \tag{II-1.11}$$

სადაც

$$S_{cl}=\int_{t_i}^{t_f}L(x_{cl})$$

ამრიგად, პროპაგატორისათვის მიიღება ჩვენს მიერ ადრე გამოყვანილი გამოსახულება.

ეს მეთოდი განსაკუთრებით ეფექტურია ზოგადი კვადრატული ფორმის შემთხვევაში:

$$L=a(t)x^2+b(t)x\dot x+c(t)\dot x^2+d(t)x+e(t)\dot x+f(t) \tag{II-1.12}$$

კვლავ განვიხილოთ (II-1.9) წარმოდგენა. ლაგრანჟიანი გავშალოთ ტეილორის მწკრივად:

$$L(x,\dot{x};t) = L(x_{cl},\dot{x}_{cl};t) + \left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{x_{cl}} y + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{x_{cl}} \dot{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} y^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} y\dot{y} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\dot{y}^2\right)\Bigg|_{x_{cl}\dot{x}_{cl}} \quad \text{(II-1.13)}$$

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების გამოყენებით აღმოჩნდება, რომ პირველი წარმოებულების შემცველი წევრები განულდება და დაგვრჩება

$$S = S_{cl} + \int_{t_i}^{t_f} dt\left(a(t)y^2 + b(t)y\dot{y} + c(t)\dot{y}^2\right) \quad \text{(II-1.14)}$$

ამიტომ პროპაგატორი ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} \times \\ &\times \int_{t_i}^{t_f} Dy(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(a(t)y^2 + b(t)y\dot{y} + c(t)\right)\dot{y}^2\right\} \end{aligned} \quad \text{(II-1.15)}$$

რაკი x_1, x_2 არ ჩნდება წირით ინტეგრალში, ამიტომ ეს უკანასნელი შეიძლება დამოკიდებული იყოს მარტო t_i, t_f-ზე ანუ

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = A(t_f, t_i)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right\} \quad \text{(II-1.16)}$$

II-2 ჰარმონიული ოსცილატორი

ოსცილატორის ამოცანა ყველაზე მნიშვნელოვანი ამოცანაა კონტინუალური ინტეგრალის ფორმალიზმში. როგორც ცნობილია, შრედინგერის განტოლება წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის ამოიხსნება ზუსტად. საინტერესოა, რომ კონტინუალური ინტეგრალის გამოთვლა ამ შემთხვევისათვის ხდება აგრეთვე ზუსტად, რაც სავსებით მოსალოდნელი იყო, რადგან ამოცანა შეიცავს მხოლოდ კვადრატულ დამოკიდებულებას და ამიტომ გაუსის ინტეგრალებზე დადის.

ამოცანას ჩამოვაყალიბებთ ზოგადად: განვიხილოთ ოსცილატორი, რომელიც ურთიერთქმედებს გარეშე წყაროსთან და აღიწერება ლაგრანჟიანით

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + Jx \quad \text{(II-2.1)}$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ დროზე დამოკიდებული წყარო $J(t)$, როგორც გარეშე ელექტრული ველი, თუ ოსცილატორი ელექტრულად დამუხტულია. თავისუფალი ჰარმონიული ოსცილატორი აქედან მიიღება წყაროს გამორთვით $J(t)\to 0$. უფრო მეტიც, ვიცით, რომ თუ წყარო დროზე დამოუკიდებელი იქნება, მაშინ ამოცანა კვლავ ამოიხსნება ზუსტად, რადგან ლაგრანჟიანის გარდაქმნით მივაღწევთ ამას. მართლაც:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + Jx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - \frac{J}{m\omega^2}\right)^2 + \frac{J^2}{2m\omega^2} = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 + \frac{J^2}{2m\omega^2} \end{aligned} \quad \text{(II-2.2)}$$

სადაც შემოვიტანეთ ახალი კოორდინატა

$$\tilde{x} = x - \frac{J}{m\omega^2} \tag{II-2.3}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ შემთხვევაში ოსცილატორის კლასიკური წონასწორობის მდებარეობა წანაცვლებულია მუდმივი სიდიდით. სისტემა იქცევა როგორც ზამბარა, რომელიც თავისუფლად არის შეტივტივებული ერთგვაროვან გრავიტაციის ველში. ამრიგად, (II-2.1) ლაგრანჟიანით აღწერილი სისტემა საინტერესო ყოფილა სხვადასხვა კერძო მაგალითების განხილვისათვის სხვადასხვა ზღვრულ შემთხვევებში.

ამ ლაგრანჟიანიდან გამომდინარეობს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები კლასიკური ტრაექტორიებისათვის. მათ აქვთ სახე

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0 \tag{II-2.4}$$

$$m\ddot{x}_{cl} + m\omega^2 x_{cl} - J = 0$$

გადასვლის ამპლიტუდაა

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = A\int Dx e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} \tag{II-2.5}$$

რაკი ქმედება მხოლოდ კვადრატულ ფორმას შეიცავს $x(t)$ დინამიკური ცვლადის მიმართ, ამპლიტუდის გამოსათვლელად მას წარმოვადგენთ როგორც კლასიკურ წირს და მისგან გადახრას

$$x(t) = x_{cl}(t) + y(t) \tag{II-2.6}$$

ამის შემდეგ ნათელია, რომ

$$S[x] = S[x_{cl}] + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2\right) \tag{II-2.7}$$

$y(t)$ ცვლადი წარმოადგენს კვანტურ ფლუქტუაციებს კლასიკური წირის მახლობლად, სახელდობრ, ის ზომავს ტრაექტორიის გადახრას კლასიკური ტრაექტორიიდან. რადგან ტრაექტორიის ბოლო წერტილები დაფიქსირებულია, ფლუქტუაციები დააკმაყოფილებენ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$y(t_i) = y(t_f) = 0 \tag{II-2.8}$$

ნათელია, რომ ყველა წირზე აჯამვა ეკვივალენტურია აჯამვისა ყველა შესაძლო ფლუქტუაციების მიხედვით, რომლებიც ამ შეზღუდვას ემორჩილებიან. ამიტომ გადასვლის ამპლიტუდას ასე გადავწერთ

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) =$$

$$= A\int Dy e^{\frac{i}{\hbar}\left[S[x_{cl}] + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2\right)\right]} = Ae^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}\int Dy e^{\frac{i}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left(m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2\right)} \tag{II-2.9}$$

ეს არის ინტეგრალი, რომელშიც ექსპონენტა კვადრატულია ცვლადის მიხედვით და შეიძლება აღებულ იქნას სხვადასხვა გზით.

– ფურიე-გარდაქმნის მეთოდი

სხვადასხვა მეთოდებს შორის ყველაზე გამჭვირვალედ გამოიყურება ფურიე-გარდაქმნის მეთოდი, რომელიც დაწვრილებით არის აღწერილი ფეინმანისა და

ჰიბსის წიგნში **(Р.Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям. Мир, Москва,1968)**

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ გადასვლის ამპლიტუდის ინტეგრალქვეშა ექსპონენტა დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული. ამიტომ ჩავატაროთ ცვლადის შეცვლა

$$t \to t - t_i$$

ამ დროს ამპლიტუდა ასე გადაიწერება

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}\int Dye^{\frac{i}{2\hbar}\int_0^T dt\left(m\dot{y}^2 - m\omega^2 y^2\right)} \tag{II-2.10}$$

სადაც გამოვყავით დროის ინტერვალი $T = t_f - t_i$. ხოლო სასაზღვრო პირობა ასე გამოიყურება

$$y(0) = y(T) = 0$$

ამის შესაბამისად ფლუქტუაციები ტრაექტორიის ნებისმიერ წერტილში წარმოვადგინოთ ფურიეს მწკრივად

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{T}t\right) \quad , \qquad n \text{ მთელი რიცხვია.} \tag{II-2.11}$$

ამრიგად წირისათვის ვიყენებთ აპროქსიმაციას “ფურიე-წირებით”. თუ ჩვენ გაშლის კოეფიციენტებს a_n ისე შევარჩევთ, რომ

$$y_j = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{T} j\right)$$

მაშინ ფურიე-წირები, ცხადია, გაივლიან დაყოფის იმავე შუალედურ წერტილებზე (x,t)-სიბრტყეში. ახლა შეგვიძლია ჩავატაროთ საჭირო გამოთვლები. ვპოულობთ:

$$\int_0^T dt\dot{y}^2 = \sum_{m,n=1}^{N-1}\int_0^T dta_n a_m\left(\frac{\pi n}{T}\right)\left(\frac{\pi m}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{T}t\right)\cos\left(\frac{\pi m}{T}t\right) = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 a_n^2 \tag{II-2.12}$$

სადაც გამოვიყენეთ კოსინუსის ორთოგონალურობის თვისებები. ანალოგიურად

$$\int_0^T dty^2(t) = \sum_{n,m=1}^{N-1}\int_0^T dta_n a_m \sin\left(\frac{\pi n}{T}t\right)\sin\left(\frac{\pi m}{T}t\right) = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 \tag{II-2.13}$$

რაკი ფურიე-წირებზე გადავედით, ნათელია, რომ ინტეგრაცია ყოველი კვანტური ფლუქტუაციით ეკვივალენტურია ინტეგრაციისა გაშლის a_n კოეფიციენტების ყველა შესაძლო მნიშვნელობით. ნათელია აგრეთვე, რომ გვაქვს ზუსტად იმდენივე $N-1$ დამოუკიდებელი ფურიე-კოეფიციენტი a_n. ამიტომ გადასვლის ამპლიტუდისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} A'e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}\int da_1 ... da_{N-1}\exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{T}{2}\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 ma_n^2 - \frac{T}{2}m\omega^2 a_n^2\right]\right\} = \tag{II-2.14}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} A'e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}\int da_1 ... da_{N-1}\exp\left\{\frac{imT}{4\hbar}\sum_{n=1}^{N-1}\left[\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 - \omega^2\right]a_n^2\right\}$$

აქ ვგულისხმობთ, რომ გარდაქმნის იაკობიანიდან წარმოქმნილი ყველა შესაძლო ფაქტორი შეიძლება ჩაირთოს A' კოეფიციენტში, რომელსაც შემდგომში განვსაზღვრავთ.

ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში გადასვლის ამპლიტუდა არის ერთმანეთისგან განცალკევებული ინტეგრალების ნამრავლი, ამასთან თითოეულ მათგანს აქვს გაუსიანი ფორმა, რომელიც ადვილად გამოითვლება. მართლაც

$$\int da_n \exp\left\{\frac{imT}{4\hbar}\left(\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2-\omega^2\right)a_n^2\right\}=$$

$$=\left(\frac{4\pi i\hbar}{mT}\right)^{1/2}\left(\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2-\omega^2\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{4\pi i\hbar}{mT}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi n}{T}\right)^{-1}\left(1-\left(\frac{\omega T}{\pi n}\right)^2\right)^{-1/2} \qquad \text{(II-2.15)}$$

ჩავსვათ ახლა ეს ცალკეული ინტეგრალებისათვის გადასვლის ამპლიტუდის (II-2.14) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$U\left(t_f,x_f;t_i,x_i\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} A\ e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}\prod_{n=1}^{N-1}\left(1-\left(\frac{\omega T}{\pi n}\right)^2\right)^{-1/2} \qquad \text{(II-2.16)}$$

ახლა გამოვიყენოთ ცნობილი იგივეობა (იხ. მათემატიკური ცნობარები)

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N-1}\left(1-\left(\frac{\omega T}{\pi n}\right)^2\right)=\frac{\sin\omega T}{\omega T} \qquad \text{(II-2.17)}$$

მიიღება

$$U\left(t_f,x_f;t_i,x_i\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} A'' e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right)^{-1/2} \qquad \text{(II-2.18)}$$

A'' მუდმივის განსაზღვრა შეიძლება მარტივად: საკმარისია შევნიშნოთ, რომ როცა $\omega=0$, ჰარმონიული ოსცილატორი დადის თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანაზე, რომლისთვისაც უკვე ნაპოვნი გვაქვს გადასვლის ამპლიტუდა, რომელსაც აქვს სახე (II-1.6):

$$U_{F.P.}\left(t_f,x_f;t_i,x_i\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t_f-t_i\right)}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}$$

შედარება იძლევა

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} A''=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} \qquad \text{(II-2.19)}$$

ამრიგად, განვსაზღვრეთ გადასვლის ამპლიტუდის საბოლოო სახე ჰარმონიული ოსცილატორისათვის

$$U_{OSC}\left(t_f,x_f;t_i,x_i\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right)^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}=$$

$$=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left[x_{cl}\right]\right\} \qquad \text{(II-2.20)}$$

აბსოლუტურად ნათელია, რომ ეს გამოსახულება დადის თავისუფალი ნაწილაკის გადასვლის ამპლიტუდაზე ზღვარში, როცა $\omega\to 0$.

–კლასიკური ქმედების გამოთვლა

გადასვლის ამპლიტუდის სრული განსაზღვრისათვის გვჭირდება კლასიკური ქმედების გამოთვლა. ამის გაკეთება არც ისე ძნელია. ქვემოთ ეს იქნება

გადმოცემული საკმაოდ ზოგად კონტექსტში, რათა დაფიქსირდეს გამოთვლის ერთ-ერთი ეფექტური მეთოდი.

გავიხსენოთ, რომ მოცემული სისტემისათვის ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას აქვს სახე

$$m\ddot{x}_{cl} + m\omega^2 x_{cl} - J = 0$$

სხვა სიტყვებით, კლასიკური ტრაექტორია არის შემდეგი განტოლების ამოხსნა

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x_{cl}(t) = \frac{J(t)}{m} \qquad \text{(II-2.21)}$$

ამ განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის სახით:

$$x_{cl}(t) = x_H(t) + x_I(t), \qquad \text{(II-2.22)}$$

სადაც ერთგვაროვანი ამონახსნია

$$x_H(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \qquad \text{(II-2.23)}$$

ხოლო A და B არის ნებისმიერი კოეფიციენტები.

კერძო ამონახსნის მოსაძებნად გამოვიყენოთ გრინის ფუნქციის მეთოდი. ამ განტოლების გრინის ფუნქცია განიმარტება განტოლებით

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) G(t - t') = -\delta(t - t') \qquad \text{(II-2.24)}$$

ნათელია, რომ თუ ცნობილი იქნება გრინის ფუნქცია, $G(t - t')$, არაერთგვაროვანი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$x_I(t) = -\int_{t_i}^{t_f} dt' G(t - t') \frac{J(t')}{m} \qquad \text{(II-2.25)}$$

თვითონ გრინის ფუნქცია ადვილად აიგება შემდეგი ფურიე-გარდაქმნის გამოყენებით

$$G(t - t') = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik(t - t')} \tilde{G}(k) \qquad \text{(II-2.26)}$$

ამავე დროს

$$\delta(t - t') = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(t - t')}$$

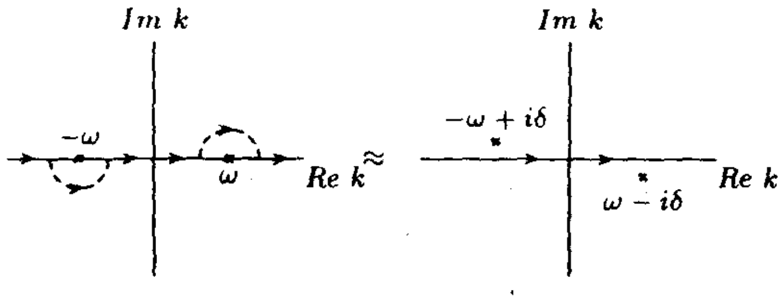
ჩავსვათ ახლა ეს ყველაფერი (II-2.25) განტოლებაში. მიიღება

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \qquad \text{(II-2.27)}$$

შესაბამისად, გრინის ფუნქციაა

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(t - t')}}{k^2 - \omega^2} \qquad \text{(II-2.28)}$$

პირველივე შეხედვით ნათელია, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას აქვს პოლუსები წერტილებში: $k = \pm\omega$. ამიტომ ეს ინტეგრალი უნდა განიმარტოს კომპლექსურ სიბრტყეში გაგძელებით და ნაშთთა თეორიის გამოყენებით. ამისათვის აუცილებელია ავირჩიოთ კონტური კომპლექსურ k-სიბრტყეში. ჩვეულებრივად, კლასიკურ მექანიკაში აინტერესებთ დაგვიანებული და წინმსწრები გრინის ფუნქციები. მაგრამ კვანტურ ველის თეორიაში ფუნდამენტური მნიშვნელობა ენიჭება ფეინმანის გრინის ფუნქციას, რომელსაც შეესაბამება ნახაზზე მოცემული კონტური.



ნახაზი 7

ამის სათანადოდ უნდა მივიღოთ შემდეგი განმარტება

$$\widetilde{G}_F(k) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2 - \omega^2 + i\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k + \omega - i\delta} \frac{1}{k - \omega + i\delta} \qquad \text{(II-2.29)}$$

სადაც შემოვიტანეთ

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\omega}$$

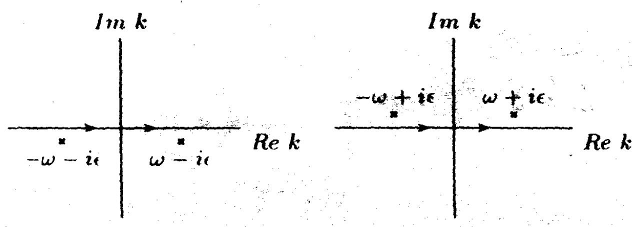
სხვა სიტყვებით, გრინის ფუნქციას (II-2.29) განტოლებაში შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 - i\varepsilon \right) G_F(t - t') = -\delta(t - t') \qquad \text{(II-2.30)}$$

სისრულისათვის შევნიშნოთ, რომ დაგვიანებული და წინმსწრები გრინის ფუნქციები ამ ენაზე შეესაბამება შემდეგ არჩევას

$$G^{R,A}(k) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(k \pm i\varepsilon)^2 - \omega^2} \qquad \text{(II-2.31)}$$

რასაც შეესაბამება კონტურების ასეთი კონფიგურაცია



ნახაზი 8

ფეინმანის გრინის ფუნქციის შემთხვევაში კონტური უნდა ჩავკეტოთ ქვედა ნახევარსიბრტყეში, როცა $t-t'>0$. მაშინ მიიღება

$$G^{(+)}(t-t')=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int dk\frac{e^{-ik(t-t')}}{(k+\omega-i\delta)(k-\omega+i\delta)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2\omega}=\frac{1}{2i\omega}e^{-i\omega(t-t')} \qquad \text{(II-2.32)}$$

მეორე მხრივ, როცა $t-t'<0$, კონტურს ჩავკეტავთ ზედა ნახევარსიბრტყეში. ვპოულობთ

$$G^{(-)}(t-t')=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int dk\frac{e^{-ik(t-t')}}{(k+\omega-i\delta)(k-\omega+i\delta)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}2\pi i\frac{e^{i\omega(t-t')}}{-2\omega}=\frac{1}{2i\omega}e^{i\omega(t-t')} \qquad \text{(II-2.33)}$$

ამრიგად, ფეინმანის გრინის ფუნქციას აქვს სახე

$$G_F(t-t')=\theta(t-t')\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2i\omega}+\theta(t'-t)\frac{e^{i\omega(t-t')}}{2i\omega} \qquad \text{(II-2.34)}$$

ამ გრინის ფუნქციის აგების შემდეგ არაერთგვაროვან ამონახსნს ჩავწერთ შემდეგნაირად

$$x_I(t)=-\int_{t_i}^{t_f}dt'G_F(t-t')\frac{J(t')}{m}=-\frac{1}{m}\left(\int_{t_i}^{t}dt'\frac{e^{i\omega(t-t')}}{2i\omega}J(t')+\int_{t}^{t_f}dt'\frac{e^{i\omega(t-t')}}{2i\omega}J(t')\right)=$$

$$=-\frac{1}{2im\omega}\left(\int_{t_i}^{t}dt'e^{-i\omega(t-t')}J(t')+\int_{t}^{t_f}dt'e^{i\omega(t-t')}J(t')\right) \qquad \text{(II-2.34)}$$

ამიტომ

$$x_{cl}(t)=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}-\frac{1}{2im\omega}\left(\int_{t_i}^{t}dt'e^{-i\omega(t-t')}J(t')+\int_{t}^{t_f}dt'e^{i\omega(t-t')}J(t')\right) \qquad \text{(II-2.35)}$$

დავადოთ სასაზღვრო პირობები

$$x_{cl}(t_i)=x_i, \qquad x_{cl}(t_f)=x_f \qquad \text{(II-2.36)}$$

და ამოვხსნათ ნებისმიერი მუდმივები საწყისი და საბოლოო კოორდინატების მეშვეობით:

$$A=\frac{1}{2i\sin\omega T}\left\{\left(x_f e^{-i\omega t_i}-x_i e^{-i\omega t_f}\right)+\frac{e^{-i\omega t_f}}{m\omega}\int_{t_i}^{t_f}dt'\sin\omega(t'-t_i)J(t')\right\}$$

$$B=\frac{1}{2i\sin\omega T}\left\{(x_i e^{i\omega t_f}-x_f e^{i\omega t_i})+\frac{e^{i\omega t_i}}{m\omega}\int_{t_i}^{t_f}dt'\sin\omega(t_f-t')J(t')\right\}$$

ამ თანაფარდობათა გათვალისწინებით კლასიკური ტრაექტორიისათვის ვღებულობთ

$$x_{cl}(t)=\frac{1}{\sin\omega T}\times$$
$$=-\left\{x_f\sin\omega(t-t_i)+x_i\sin\omega(t_f-t)+\frac{1}{2m\omega}\int_{t_i}^{t_f}dt'J(t')\left(e^{-i\omega T}\cos\omega(t-t')-\cos\omega(t_f+t_i-t-t')\right)\right\}-$$
$$-\frac{1}{2im\omega}\left(\int_{t_i}^{t}dt'J(t')e^{-i\omega(t-t')}+\int_{t}^{t_f}dt'J(t')e^{i\omega(t-t')}\right)$$

ახლა უკვე შეგვიძლია კლასიკური ქმედების მიღება ლაგრანჟიანის შედგენით და ინტეგრაციით დროის მიხედვით. მიიღება

$$\begin{aligned}S[x_{cl}]&=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_i^2+x_f^2\right)\cos\omega T-2x_ix_f\right]+\\&+\frac{x_i}{\sin\omega T}\int_{t_i}^{t_f}dtJ(t)\sin\omega(t_f-t)+\frac{x_f}{\sin\omega T}\int_{t_i}^{t_f}dtJ(t)\sin\omega(t-t_i)-\\&-\frac{1}{m\omega\sin\omega T}\int_{t_i}^{t_f}dt\int_{t_i}^{t}dt'J(t)\sin\omega(t_f-t)\sin\omega(t'-t_i)J(t')\end{aligned}\qquad\text{(II-2.37)}$$

ამით მთავრდება დროზე დამოკიდებულ გარეშე წყაროსთან ურთიერთქმედი ჰარმონიული ოსცილატორის გადასვლის ამპლიტუდის გამოთვლა.

– ჰარმონიული ოსცილატორის სპექტრის გამოთვლა

ზემოთ მიღებული ფორმულიდან შეგვიძლია განვიხილოთ მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევები. შევისწავლოთ, მაგალითად, თავისუფალი ჰარმონიული ოსცილატორი. ამ დროს უნდა ავიღოთ $J=0$ და დაგვრჩება

$$S^o[x_{cl}]=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[\left(x_i^2+x_f^2\right)\cos\omega T-2x_ix_f\right]\qquad\text{(II-2.38)}$$

ბუნებრივია, რომ შედეგი სიმეტრიულია $i\leftrightarrow f$ გადასმის მიმართ. თუ შევაერთებთ ადრე გამოთვლილს (II-2.20) და ახლა მიღებულს ერთად, დავასკვნით, რომ ოსცილატორისათვის გადასვლის ამპლიტუდა ყოფილა:

$$\begin{aligned}U(t_f,x_f;t_i,x_i)&=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{cl}]}=\\&=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[\left(x_i^2+x_f^2\right)\cos\omega T-2x_ix_f\right]\right\}\end{aligned}\qquad\text{(II-2.39)}$$

სპექტრის გამოსათვლელად გადასვლის ამპლიტუდა ჩავწეროთ სისრულის პირობის გამოყენებით შემდეგნაირად:

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{i}{\hbar}E_nT}\varphi_n(x_f)\varphi_n^*(x_i)\qquad\text{(II-2.40)}$$

ახლა გამოვიყენოთ თანაფარდობები ტრიგონომეტრიიდან:

$$i\sin\omega T=\frac{1}{2}e^{i\omega T}\left(1-e^{-2i\omega T}\right)$$
$$\cos\omega T=\frac{1}{2}e^{i\omega T}\left(1+e^{-2i\omega T}\right)$$

ამ თანაფარდობების გათვალისწინებით გადასვლის ამპლიტუდის წინა გამოსახულება ასე გადავწეროთ:

$$U=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-i\frac{\omega T}{2}}\left(1-e^{-2i\omega T}\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[\left(x_f^2+x_i^2\right)\frac{1+e^{2i\omega T}}{1-e^{2i\omega T}}-\frac{4x_ix_fe^{-i\omega T}}{1-e^{2i\omega T}}\right]\right\} \tag{II-2.41}$$

თუ ახლა ამ გამოსახულებაში მარჯვენა მხარეს გავშლით $e^{-i\omega T}$ ფუნქციის ხარისხების მწკრივად, რაკი ამ მწკრივის პირველი კოეფიციენტი აქ არის $e^{-i\omega T/2}$, ამიტომ გაშლის ნებისმიერ წევრს ექნება სახე $e^{-i\omega T/2}e^{-in\omega T}$, სადაც $n=1,2,3,...$ ეს კი ნიშნავს, რომ ენერგიის დონეები განისაზღვრება ფორმულით

$$E_n=\hbar\omega(n+1/2) \tag{II-2.42}$$

ამრიგად, მივიღეთ დონეების ცნობილი ფორმულა. მაგრამ ტალღური ფუნქციებიც რომ მივიღოთ, აუცილებელია მოვახდინოთ მწკრივად გაშლა ბოლომდე. მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ, მაგალითად, $n=2$ ამოხსნა. ამისათვის (II-2.41) გამოსახულების მარჯვენა მხარე უნდა გავშალოთ ამ რიგის წევრებამდე. გვაქვს:

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-i\frac{\omega T}{2}}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}+...\right)$$
$$\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)\left(e^{-2i\omega T}+...\right)+2\frac{m\omega}{\hbar}x_ix_fe^{-i\omega T}+...\right]$$

ანუ

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)}e^{-i\omega T}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}\right)\times$$
$$\times\left\{1+\frac{2m\omega}{\hbar}x_ix_fe^{-i\omega T}+\frac{4m^2\omega^2}{2\hbar^2}x_i^2x_f^2e^{-2i\omega T}-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)e^{-2i\omega T}...\right\} \tag{II-2.43}$$

ახლა გამოვყოთ უმცირესი რიგის წევრის კოეფიციენტი

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{/2}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)}e^{-i\omega T/2}=e^{-\frac{i}{\hbar}E_0T}\varphi_0\left(x_f\right)\varphi_0^*\left(x_i\right)$$

ეს კი ნიშნავს, რომ

$$E_0=\frac{\hbar\omega}{2} \tag{II-2.44}$$

და

$$\varphi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{II-2.45}$$

შემდეგი რიგის წევრი იქნება:

$$e^{-i\omega T/2}e^{-i\omega T}\frac{m\omega}{\pi\hbar}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)}\frac{2m\omega}{\hbar}x_ix_f=e^{-\frac{i}{\hbar}E_1T}\varphi_1\left(x_f\right)\varphi_1^*\left(x_i\right)$$

აქედან ჩანს, რომ

$$E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega=\hbar\omega(1+1/2)$$

და
$$\varphi_1(x)=\frac{2m\omega}{\hbar}x\varphi_0(x) \tag{II-2.46}$$

შემდეგი წევრია

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)}\left[\frac{2m^2\omega^2}{\hbar^2}x_i^2x_f^2-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x_i^2+x_f^2\right)+\frac{1}{2}\right] \tag{II-2.47}$$

რაც მრავლდება ფაქტორზე $\exp\left[-\frac{5}{2}i\omega T\right]$. ამიტომ ენერგიისთვის იძლევა

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega(2+1/2) \qquad \text{(II-2.48)}$$

და რადგან (II-2.47)-ის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ფაქტორიზდება ასე:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_i^2-1\right)\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_f^2-1\right)$$

ამიტომ ვღებულობთ შემდეგი სახის ტალღურ ფუნქციას:

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2-1\right)\varphi_0(x) \qquad \text{(II-2.49)}$$

და ა.შ. აიგება დანარჩენი ფუნქციებიც, რომლებიც, ისევე როგორც ზემოთ მოყვანილი, დაემთხვევა ჰარმონიული ოსცილატორის ცნობილ ამონახსნებს.
ამ ფუნქციების აგების ზოგადი რეცეპტი აღწერილია წიგნში: **Р.Фейнман.А.Хиббс Квантовая механика и интегралы по траекториям. стр.230.**

თავი III. სამგანზომილებიანი შემთხვევა

ზემოთ ჯერჯერობით ყველგან ვიფარგლებოდით ერთგანზომილებიანი განხილვით, როცა გვქონდა მარტო ერთი სივრცული კოორდინატა. აშკარაა, რომ ფიზიკურად უფრო საინტერესოა მრავალგანზომილებიანი (სამგანზომილებიანი) ამოცანების განხილვა. საგულისხმოა, რომ ზოგადი თანაფარდობების მიღება, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, არ ხვდება რაიმე პრინციპულ შეზღუდვებს. ასევე ადვილად გადავალთ რადიალური ამოცანების ჩამოყალიბებაზე, როცა საჭირო იქნება ცენტრალური სიმეტრიის პოტენციალების განხილვა.

III-1. ფეინმანის წირებზე ინტეგრალი 3-განზომილებაში.

პროპაგატორი განმარტებული გვაქვს ჩვეულებრივად, როგორც გადასვლის ამპლიტუდა:

$$U\left(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i\right)\equiv K\left(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i\right)=\left\langle \vec{x}_f\left|e^{-\frac{i}{\hbar}\left(t_f-t_i\right)H}\right|\vec{x}_i\right\rangle = \\ =\sum_{a,a'}\left\langle \vec{x}_f\left|a\right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\left(t_f-t_i\right)H}\left|a'\right\rangle\left\langle a'\right|\vec{x}_i\right\rangle \tag{III-1.1}$$

სადაც $\left|a\right\rangle$ არის ნებისმიერი ერმიტული ოპერატორის საკუთარი ვექტორები, თუმცა უმჯობესია ჩავთვალოთ ჰამილტონიანის საკუთარ ვექტორებად; ამ შემთხვევაში ექსპონენტაში ჰამილტონიანი შეგვიძლია შევცვალოთ მისი საკუთარი მნიშვნელობებით და ორთონორმირების პირობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$K\left(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i\right)=\sum_a e^{-\frac{i}{\hbar}E_a\left(t_f-t_i\right)}\left\langle \vec{x}_f\left|a\right\rangle\left\langle a\right|\vec{x}_i\right\rangle \tag{III–1.2}$$

ცხადია, რომ ყველაფრის გამეორება შეგვიძლია სივრცული $\vec{x}$ ვექტორის დროსაც. ამიტომ მოველით, რომ გვექნება ფეინმანის წირითი ინტეგრალი-სათვის შემდეგი წარმოდგენა

$$K\left(\vec{r}_f,\vec{r}_i;T=t\ -t_i\right)=\int D\vec{r}(t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\left(\vec{r}_f,\vec{r}_i\right)\right] \tag{III-1.3}$$

სადაც ინტეგრაცია ტარდება ყველა შესაძლო ტრაექტორიებზე 3-განზომილებაში ან, როგორც იტყვიან, **ისტორიების** მიხედვით, რომელიც იწყება $\vec{r}_i=\vec{r}(0)$ წერტილში და მთავრდება $\vec{r}_f=\vec{r}(T)$ წერტილში.

ინტეგრალქვეშ კი დგას კლასიკური ქმედება

$$S\left(\vec{r}_f,\vec{r}_i\right)=\int_0^T L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)dt \tag{III-1.4}$$

წირებზე ფეინმანის ინტეგრალი განიმარტება ტრადიციული გზით

$$K\left(\vec{r}_f,\vec{r}_i;T\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}A_N\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2...d\vec{r}_{N-1}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N-1}S\left(\vec{r}_j,\vec{r}_{j-1}\right)\right] \tag{III-1.5}$$

მკითხველი შენიშნავდა, რომ ჩვენ ოდნავ შევცვალეთ ადრე გამოყენებული აღნიშვნები, რამაც გაუგებრობა არ უნდა გამოიწვიოს. ძირითადი ცვლილებები განპირობებულია 3–განზომილებაზე გადასვლით.

(III-1.5) ფორმულაში

$$\vec{r}_j \equiv \vec{r}(t_j), \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_i, \ \ \vec{r}_N = \vec{r}_f, \qquad t_j - t_{j-1} = \frac{T}{N} = \varepsilon \qquad \text{(III-1.6)}$$

ხოლო A_N არის ნორმირების ფაქტორი N-ურ რიგში.

დროის რომელიმე ცალკეულ ინტერვალში ქმედება ტოლია

$$S(\vec{r}_j, \vec{r}_{j-1}) \approx \varepsilon L\left(\vec{r}_j, \frac{\Delta\vec{r}_j}{\varepsilon}\right), \qquad \Delta\vec{r}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_{j-1} \qquad \text{(III-1.7)}$$

ხშირად ხდება ხოლმე, რომ ამოცანას აქვს სფერული სიმეტრია და საჭირო ხდება კუთხეებზე დამოკიდებულების განცალკევება (ისევე, როგორც იქცევიან ხოლმე შრედინგერის განტოლებაში). ბუნებრივია, შევეცადოთ კუთხეებზე დამოკიდებულების გამოყოფას ფუნქციონალურ ინტეგრალშიც.

ეს კეთდება საკმაოდ მარტივად და, ასე ვთქვათ, პირდაპირი გზით. შემოაქვთ სფერული კოორდინატები

$$\vec{r}_j = (r_j, \theta_j, \varphi_j); \qquad \vec{r}_{j-1} = (r_{j-1}, \theta_{j-1}, \varphi_{j-1})$$

მაშინ ორ წერტილს შორის მანძილის კვადრატისათვის გვექნება

$$(\Delta\vec{r}_j)^2 = r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1}\cos\Theta_j$$

სადაც

$$\cos\Theta_j = \cos\theta_j \cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j \sin\theta_{j-1}\cos(\varphi_j - \varphi_{j-1})$$

ამის გათვალისწინებით პარციალური ქმედებანი (III-1.7) ასე გადაიწერება:

$$S(\vec{r}_j, \vec{r}_{j-1}) = \frac{1}{2} m\left(r_j^2 + r_{j-1}^2\right)/\varepsilon - (m/\varepsilon) r_j r_{j-1}\cos\Theta_j - \varepsilon V(\vec{r}_j) \qquad \text{(III-1.8)}$$

გამოვიყენოთ ლეჟანდრეს პოლინომებად გაშლის ფორმულა

$$e^{u\cos\Theta} = \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\Theta) I_{l+1/2}(u) \qquad \text{(III-1.9)}$$

მაშინ ინტეგრალქვეშ ქმედების შემცველი წევრი ასე წარმოიდგინება

$$\exp\left[i\sum_{j=1}^{N-1} S(\vec{r}_j, \vec{r}_{j-1})\right] = \prod_{j=1}^{N-1} \sum_{l_j}^{\infty} (2l_j + 1) P_{l_j}(\cos\Theta_j) R_{l_j}(r_j, r_{j-1}), \qquad \text{(III-1.10)}$$

სადაც

$$R_l(r_j, r_{j-1}) =$$

$$= \left(\frac{i\pi\varepsilon}{2mr_j r_{j-1}}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon}\left(r_j^2 + r_{j-1}^2\right) - i\varepsilon V(r_j)\right] I_{l+1/2}\left(\frac{m}{i\varepsilon} r_j r_{j-1}\right) \qquad \text{(III-1.11)}$$

ინტეგრაციისა და ნამრავლების გადასმის შემდეგ (III-1.10) ფორმულის მარჯვენა მხარე ასე გადაიწერება

$$\sum_{i\ i_2 .. i_{N-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[(2l_j + 1) P_{l_j}(\cos\Theta_j) R_{l_j}(r_j, r_{j-1})\right] \right\}$$

ამ შედეგის ჩასმა (III-1.5)-ში გვაძლევს

$$K(\vec{r}_f, \vec{r}_i; T) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ N\to\infty}} A_N \sum_{i_1 .. i_{N-1}} \int \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ (2l_j + 1) P_{l_j}(\cos\Theta_j) R_{l_j}(r_j, r_{j-1}) \prod^{N-1} \left(r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi\right) \right\}$$

ამ ფორმულაში

$$\prod^{N-1} \left(r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi\right) = \prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 \sin\theta_j dr_j d\theta_j d\varphi_j$$

ახლა კუთხური ინტეგრალების აღება მარტივად ხერხდება. ამისათვის ლეჟანდრეს პოლინომები უნდა გავშალოთ სფერულ ჰარმონიკებად

$$P_l(\cos\Theta_j)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{n=-l}^{l}Y_l^{n*}(\theta_j,\varphi_j)Y_l^n(\theta_{j-1},\varphi_{j-1})$$

ორთოგონალობის პირობის გამოყენებით, რომელსაც აქვს სახე

$$\iint Y_l^{n*}(\theta,\varphi)Y_{l'}^{n'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{nn'}$$

მივიღებთ

$$\iint\prod_{j=1}^{N-1}\left\{(2l_j+1)P_{l_j}(\cos\Theta_j)\right\}\prod^{N-1}(\sin\theta d\theta d\varphi)=$$

$$=(4\pi)^{N-1}\delta_{ll_{N-1}}\prod_{j=1}^{N-1}\delta_{l_{j+1}l_{N-1}}\prod_{n=-l}^{l}Y_l^{n*}(\theta^n,\varphi^n)Y_l^n(\theta',\varphi')$$

ამის გამო თითოეული კვანტური რიცხვისათვის l რადიალური და კუთხური წვლილები პროპაგატორში ცალდებიან; ამიტომ

$$K(r_f,\theta_f,\varphi_f;r_i,\theta_i,\varphi_i;T)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}K_l(r_f,r_i;T)Y_l^{n*}(\theta^f,\varphi^f)Y_l^n(\theta^i,\varphi^i)$$

სადაც K_l არის l- ტალღის შესაბამისი რადიალური პროპაგატორი

$$K_l(r_f,r_i;T)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}(4\pi)^{N-1}A_N\int\prod_{j=1}^{N-1}\left\{R_l(r_j,r_{j-1})\right\}\prod^{N-1}(r^2dr) \qquad \text{(III-1.12)}$$

ნორმირების მამრავლი ისეა არჩეული, რომ სრული პროპაგატორი ერთზე იყოს ნორმირებული:

$$A_N=(2\pi i\varepsilon\hbar/m)^{-\frac{3}{2}N}$$

ყველაფერი ამის გათვალისწინებით მიიღება რადიალური კონტინუალური ინტეგრალის შემდეგი ცხადი სახით წარმოდგენა

$$\Theta(T)K_l(T;r_f,r_i|V)=\int_{r(0)=r_i}^{r(T)=r_f}Dr(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left[\frac{m\dot r^2}{2}-\frac{l(l+1)}{2mr^2}-V(r)\right]\right\}=$$

$$=\Theta(T)\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left(\frac{2\pi i\varepsilon\hbar}{m}\right)^{-N/2}\int_0^{\infty}\prod_{k=1}^{N-1}dr_k\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N-1}}\left[\frac{\delta_{\mathrm{k}}^2}{2\mathrm{m}}-\varepsilon\frac{l(l+1)}{2mr_kr_{k-1}}-\varepsilon V(r_k)\right]\right\} \qquad \text{(III-1.13)}$$

აქ

$$\varepsilon\equiv\frac{T}{N},\qquad r_k=r(t_k),\qquad t_k=k\varepsilon,\qquad \delta_k=r_k-r_{k-1}$$

აშკარაა, რომ თვითონ რადიალური გული დააკმაყოფილებს შრედინგერის რადიალური განტოლების შესაბამისი გრინის ფუნქციის განტოლებას:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_f}+\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r_f^2}-\frac{l(l+1)}{2mr_f^2}-V(r_f)\right]K_l(T;r_f,r_i|V)=i\delta(T)\delta(r_f-r_i) \qquad \text{(III-1.14)}$$

საწყისი პირობით

$$\lim_{T\to 0}K_l(T;r_f,r_i|V)=\delta(r_f-r_i)$$

დაწვრილებითი ინფორმაციის მოპოვება რადიალურ განტოლებებზე გადასვლის შესახებ დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია ნაშრომში D.Peak and A.Inomata, “**Summation over Feynman Histories in Polar Coordinates”.** Journal of Mathematical Physics, Volume 10,number 8, pp.1422-1428 (1969).

თავი IV. ცვლადთა გარდაქმნა ფუნქციონალურ ინტეგრალში

ფიზიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებიც შეიძლება დავძლიოთ გაცილებით უკეთესად ცვლადების სათანადო შეცვლის შემდეგ. ველის თეორიაშიც ცვლადთა გარდაქმნა ასრულებს მნიშვნელოვან როლს. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ცვლადთა გარდაქმნის ზოგად მეთოდებს, რომლებსაც ექნებათ პრაქტიკული გამოყენება ფუნქციონალურ ინტეგრალშიც, რაც ესოდენ აუცილებელია სხვადასხვა ამოხსნადი ამოცანების განხილვისას.

IV-1. წერტილოვანი კანონიკური გარდაქმნები ოპერატორულ ფორმალიზმში

დავიწყოთ ჰამილტონიანის სტანდარტული ფორმით საზოგადოდ მრავალგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში. კოორდინატულ წარმოდგენაში შრედინგერის განტოლება მოიცემა ასე (ერთეულოვანი მასისთვის):

$$\hat{H}\psi = \left[-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial q^{a2}} + V(\vec{q})\right]\psi(\vec{q}) = E\psi(\vec{q}) \qquad \text{(IV-1.1)}$$

განვიხილოთ წერტილოვანი კანონიკური გარდაქმნა, რომელიც მოიცემა ასე (როგორც ცნობილია კანონიკური გარდაქმნების თეორიიდან, ნებისმიერი წერტილოვანი გარდაქმნა არის კანონიკური. იხ. მაგ., ა.ხელაშვილი, "**კლასიკური თეორიული მექანიკა**", თსუ, 2005):

$$q^a \to Q^a = f^a(q) \qquad \text{(IV-1.2)}$$

ამავე დროს დავუშვებთ შებრუნებული გარდაქმნის არსებობასაც

$$q^a = F^a(q) \qquad \text{(IV-1.3)}$$

შრედინგერის განტოლება ახლა უნდა გადაიწეროს ახალ ცვლადებში. გაწარმოების წესებით ადვილად ჩავატარებთ საჭირო გარდაქმნებს

$$\frac{\partial}{\partial q^a}\psi(q) = \sum_b \frac{\partial f^b(q)}{\partial q^a}\frac{\partial}{\partial Q^b}\psi(F(Q))$$

$$-\frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial^2}{\partial q^{a2}}\psi(q) = \frac{1}{2}\left[-i\sum_{ab}\frac{\partial^2 f^b}{\partial q^{a2}}\frac{\partial}{i\partial Q^b} + \sum_{abc}\frac{\partial f^b}{\partial q^a}\frac{\partial f^c}{\partial q^a}\frac{\partial}{i\partial Q^b}\frac{\partial}{i\partial Q^c}\right]\psi(F(Q)) \qquad \text{(IV-1.4)}$$

განვსაზღვროთ

$$\omega^a(Q) \equiv -\sum_b \frac{\partial^2 Q^a}{\partial q^{b2}} = -\sum_b \frac{\partial^2 f^a}{\partial q^{b2}} \qquad \text{(IV-1.5)}$$

$$\Omega^{ab}(Q) \equiv \sum_c \frac{\partial Q^a}{\partial q^c}\frac{\partial Q^b}{\partial q^c} = \sum_c \frac{\partial f^a}{\partial q^c}\frac{\partial f^b}{\partial q^c} \qquad \text{(IV-1.6)}$$

ამის გათვალისწინებით შრედინგერის განტოლება ასე გადაიწერება

$$\hat{H}\psi = \left\{\frac{1}{2}\left[i\sum_a \omega^a(Q)P_a + \sum_{ab}\Omega^{ab}(Q)P_aP_b\right] + \tilde{V}(Q)\right\}\psi(F(Q)) = E\psi(F(Q)) \qquad \text{(IV-1.7)}$$

სადაც შემოვიტანეთ აღნიშვნები

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial Q^a} = P_a$$

$$\tilde{V}(Q) \equiv V(F(Q)) \qquad \text{(IV-1.8)}$$

ცვლადების შეცვლის შემდეგ მიღებული ჰამილტონიანი, საზოგადოდ, ერმიტული არ იქნება, თუკი ჩვენ შევინარჩუნებთ ჩვეულებრივ ერმიტულ შეუღლებას:

$$P_a^+ = P_a \qquad\qquad Q^{a+} = Q^a$$

ეს ხდება იმიტომ, რომ H არის ერმიტული საწყის q- სივრცეში. მაგრამ ცვლადთა შეცვლის შემდეგ Q-სივრცეში ტალღური ფუნქცია უნდა განიმარტოს გარდაქმნის იაკობიანიდან კვადრატული ფესვის შემცველი მამრავლით:

$$\int dq\psi_1^+(q)\psi_2(q) = \int J(Q)dQ\psi_1^+(F(Q))\psi_2(F(Q)) = \int dQ\Psi_1^+(Q)\Psi_2(Q) \qquad \text{(IV-1.9)}$$

სადაც

$$\Psi(Q) = J^{1/2}(Q)\psi(F(Q)) \qquad \text{(IV-1.10)}$$

ახალ სივრცეში ჰამილტონიანი მოიძებნება მსგავსების გარდაქმნით

$$H_{eff} = J^{1/2}HJ^{-1/2}, \qquad \text{(IV-1.11)}$$

რომელიც უნდა იყოს ერმიტული.

პრაქტიკულად ხშირად იაკობიანის გამოთვლა არის ხოლმე უფრო რთული, ვიდრე ზემოთ შემოყვანილი სიდიდეებისა ω და Ω. ამიტომ, სასურველია თუ H_{eff}-ს გამოვხატავთ ამ სიდიდეებით. ჯერ შევნიშნოთ, რომ

$$J^+(Q) = J(Q^+) = J(Q)$$

ამიტომ,

$$J^{1/2}P_aJ^{-1/2} = P_a + iC_a(Q), \qquad \text{(IV-1.12)}$$

სადაც

$$C_a(Q) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Q^a}\ln J(Q), \qquad C_a^+ = C_a \qquad \text{(IV-1.13)}$$

ხოლო

$$H_{eff} = \frac{1}{2}\left[i\sum_a \omega^a(Q)(P_a + iC_a) + \sum_{ab}\Omega^{ab}(P_a + iC_a)(P_b + iC_b)\right] + \tilde{V}(Q) \qquad \text{(IV-1.14)}$$

მოვითხოვოთ ახლა ამ ჰამილტონიანის ერმიტულობა. გვაქვს

$$H_{eff} - H^+_{eff} = i\sum_a\left(\omega^a + 2\sum_b\Omega^{ab}C_b + \sum_b\Omega^{ab}_{,b}\right)\left(P_a - \frac{1}{2}iC_a\right) = 0,$$

საიდანაც ვპოულობთ დამატებით შეზღუდვას

$$\omega^a + 2\sum_b\Omega^{ab}C_b + \sum_b\Omega^{ab}_{,b} = 0 \qquad \text{(IV-1.15)}$$

ეს არის განტოლება C_a-ს განსაზღვრისათვის. ინდექსში მძიმის ნიშანი, როგორც საყოველთაოდ მიღებულია, აღნიშნავს გაწარმოებას. ამ შეზღუდვის გათვალის-წინებით ერმიტული ეფექტური ჰამილტონიანი ასე გამოიყურება

$$H_{eff} = \frac{1}{2}\sum_{ab}\left(P_a\Omega^{ab}P_b + C_a\Omega^{ab}C_b\right) + \tilde{V}(Q) \qquad \text{(IV-1.16)}$$

ეს არის ძირითადი შედეგი, რომელსაც შემდგომში გამოვიყენებთ ცვლადთა შეცვლის დროს ფუნქციონალურ ინტეგრალში.

IV-2. ვეილის მოწესრიგება ფუნქციონალურ ინტეგრალში

ფუნქციონალურ ინტეგრალში აღწერილი ფორმალიზმის გამოყენებისათვის გავიხსენოთ, რომ უნდა გამოვიყენოთ ოპერატორთა მოწესრიგება ვეილის წესით. ეს წესი გულისხმობს ოპერატორთა სიმეტრიზაციას დაკვანტვამდე და შემდეგ შუალედური წერტილის მიწერას კოორდინატისათვის. ამიტომ, რომ ჩავწეროთ ფეინმანის წირებზე ინტეგრალი ახლად შემოყვანილი ეფექტური ჰამილტონიანისათვის, პირველ რიგში უნდა მოვახდინოთ ვეილის მოწესრიგება. ადვილად აღმოვაჩენთ, რომ

$$P_a \Omega^{ab} P_b = \left(P_a \Omega^{ab} P_b\right)_W + \frac{1}{4}\Omega^{ab}_{,ab} \qquad \text{(IV-2.1)}$$

ამიტომ

$$H_{eff} = \frac{1}{2}\sum_{ab}\left(P_a \Omega^{ab} P_b\right)_W + \tilde{V}(Q) + \Delta V(Q) \qquad \text{(IV-2.2)}$$

სადაც

$$\Delta V = \sum_{ab}\frac{1}{2}\left(C_a \Omega^{ab} C_b + \frac{1}{4}\Omega^{ab}_{,ab}\right) \qquad \text{(IV-2.3)}$$

ეს არის დამატებითი წევრი, რომელიც არ წარმოიქმნება კლასიკურ წერტილოვან გარდაქმნებში. იგი შეესაბამება წმინდა კვანტურ ეფექტებს და თუ ჩვენ შევინარჩუნებდით პლანკის $\hbar$ მუდმივას ზემოთ ჩატარებულ გამოთვლებში, დავინახავდით, რომ ΔV პროპორციულია $\hbar^2$-ისა. ამის შემდეგ წირზე ფეინმანის ინტეგრალი შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე:

$$\left\langle Q_f \left| e^{-\frac{i}{\hbar}H_{eff}\left(t_f - t_i\right)} \right| Q_i \right\rangle =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int\limits_{Q^a(N)=Q^a_f;\, Q^a(0)=Q^a_i} \ldots \int \left\{\prod_{a=1}^{M}\prod_{n=1}^{N-1} dQ(n)\right\}\left\{\prod_{n=1}^{N}\frac{dP^a(n)}{2\pi}\right\}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_n A_n\right] \qquad \text{(IV-2.4)}$$

ხოლო

$$A_n = \sum_a P_a(n)\left[Q^a(n) - Q^a(n-1) - \varepsilon H_n\right] \qquad \text{(IV-2.5)}$$

და

$$H_n = \frac{1}{2}\sum_{a,b} P_a(n) P_b(n) \Omega^{ab}\left(\overline{Q}(n)\right) + V\left(\overline{Q}(n)\right) + \Delta V\left(\overline{Q}(n)\right) \qquad \text{(IV-2.6)}$$

სადაც კოორდინატა აღებულია შუალედურ წერტილში

$$\overline{Q}(n) = \frac{1}{2}\left[Q(n) + Q(n-1)\right] \qquad \text{(IV-2.7)}$$

ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში M აღნიშნავს სივრცის განზომილებას. ასე ჩაიწერება კონტინუალური ინტეგრალი ფაზურ სივრცეში. კონფიგურაციულ სივრცეში გადასაწერად უნდა ჩატარდეს ინტეგრაცია იმპულსებით. ამ ინტეგრაციების ჩატარება შესაძლებელია განსახილავ შემთხვევაში, რადგან საქმე გვაქვს გაუსის ტიპის ინტეგრალებთან. მათი აღების დროს წარმოიქმნება ახალი იაკობიანები, რომლებიც კიდევ დამატებით წვლილებს მოგვცემენ. ყველაფერი ეს გამოითვლება პირდაპირი გზით და საკმაოდ მარტივად. მისი საბოლოო სახე ასეთია:

$$\left\langle Q_f \left| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{eff}\left(t_f - t_i\right)} \right| Q_i \right\rangle =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int ... \int \left\{ \prod_{a=1}^{M} dQ^a(n) \right\} (2\pi i \hbar \varepsilon)^{-\frac{NM}{2}} \prod_{\substack{n=1 \\ Q(0)=Q_i; \\ Q(N)=Q_f}}^{N-1} \det \Omega\left(\overline{Q}(n)\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} L_n \right] \qquad \text{(IV-2.8)}$$

სადაც

$$L_n = \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{ab} \begin{matrix} \left[Q^a(n) - Q^a(n-1)\right] \Omega_{ab}^{-1}\left(\overline{Q}(n)\right) \left[Q^b(n) - Q^b(n-1)\right] - \\ - \widetilde{V}\left(\overline{Q}(n)\right) - \Delta V\left(\overline{Q}(n)\right) \end{matrix}$$

(IV-2.9)

ესაა დისკრეტული წარმოდგენა ფუნქციონალური ინტეგრალისა. რაც შეეხება მოკლე ფორმალურ ჩაწერას, შეგვიძლია ასე აღვნიშნოთ:

$$\left\langle Q_f \left| e^{-\frac{i}{\hbar} H_{eff}\left(t_f - t_i\right)} \right| Q_i \right\rangle = \int .... \int DQ (\det \Omega)^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(Q, \dot{Q}) dt} \qquad \text{(IV-2.10)}$$

ყურადღება მივაქციოთ გარდაქმნის იაკობიანის (დეტერმინანტის) გამოჩენას კონტინუალური ინტეგრაციის ზომაში.

წერტილოვანი კანონიკური გარდაქმნების კერძო მაგალითია გადასვლა დეკარტეს კოორდინატებიდან მრუდწირულ კოორდინატებზე. რაკი

$$(ds)^2 = \sum_a \left(dq^a \right) = \sum_{ab} dQ^a dQ^b \sum_c \frac{\partial q^c}{\partial Q^a} \frac{\partial q^c}{\partial Q^b} \equiv \sum_{ab} dQ^a dQ^b g_{ab}$$

მეტრიკა ახალ სისტემაში მოიცემა ასე:

$$g_{ab} \equiv \Omega_{ab}^{-1}, \qquad g^{ab} = \Omega_{ab} \qquad \text{(IV-2.11)}$$

ამიტომ

$$J^2 = \det g \equiv g, \qquad C_a = \frac{1}{4} (\ln g)_a, \qquad etc. \qquad \text{(IV-2.12)}$$

ცხადი გამოთვლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\Delta V = \frac{1}{8} \Gamma_{ac}^b \Gamma_{bd}^a g^{cd} \qquad \text{(IV-2.13)}$$

სადაც Γ არის მეორე გვარის კრისტოფელის სიმბოლო

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} \left(g_{bd,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d} \right) \qquad \text{(IV-2.14)}$$

IV-3. კანონიკური გარდაქმნები კონტინუალურ ინტეგრალში

ზემოთ შევისწავლეთ წერტილოვანი კანონიკური გარდაქმნები ოპერატორულ ფორმალიზმში, სახელდობრ, ცვლადთა შეცვლა ჰამილტონიანის სტანდარტულ ფორმაში. შემდეგ მიღებული ეფექტური ჰამილტონიანისათვის ჩავწერეთ კონტინუალური ინტეგრალი. ახლა შევეცადოთ ცვლადთა გარდაქმნის ჩატარებას უშუალოდ კონტინუალურ ინტეგრალში.

ამასთან განვიხილავთ M ცვლადის ზოგად შემთხვევას.

გავიხსენოთ, რომ ფეინმანის გული არის გადასვლის ამპლიტუდა რაიმე საწყისი კონფიგურაციიდან $q_i = \left(q_i^1, q_i^2, ..., q_i^M \right)$ დროის t_i მომენტში სხვა კონფიგურაციაზე q_f დროის t_f მომენტისათვის. ის მოიცემა თანაფარდობით:

$$\left\langle q_f \left| e^{-iH(t_f - t_i)} \right| q_i \right\rangle =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int ....\int \frac{\prod_{n=1}^{M}\prod_{n=1}^{N-1} dq_n^a}{(2\pi i\varepsilon)^{NM/2}} \exp\left[i\varepsilon \sum_n L_n\right] \tag{IV-3.1}$$

სადაც

$$L_n = \frac{1}{2\varepsilon^2}\sum_n \left[q^a(n) - q^a(n-1)\right]^2 - V(\bar{q}(n)) \tag{IV-3.2}$$

ჩავატაროთ ცვლადების შეცვლა $q \to Q$: $q^a(n) \to F(Q(n))$
ახალი ინტეგრაციის ზომა მოიცემა ასე:

$$\prod_{a=1}^{M} dq^a(n) = g^{1/2}(Q(n)) \prod_{a=1}^{M} dQ^a(n) \tag{IV-3.3}$$

ლაგრანჟიანი მიიღებს სახეს

$$L_n = \frac{1}{2\varepsilon^2}\left[F^a(Q(n)) - F^a(Q(n-1))\right]^2 - V(F(Q(n))) \tag{IV-3.4}$$

ახლა ეს გამოსახულება უნდა გავშალოთ $\overline{Q}(n)$ შუალედური წერტილის მახლობლად. კინეტიკურ ენერგიაში წამყვანი წევრი იქნება

$$L_n^{(0)} = \frac{1}{2\varepsilon^2} g_{ab}(\overline{Q}(n))\Delta Q^a(n)\Delta Q^b(n) \tag{IV-3.5}$$

სადაც

$$\Delta Q^a(n) = Q^a(n) - Q^a(n-1) \tag{IV–3.6}$$

ისმის კითხვა: (IV-3.4) ფორმულის გაშლაში სიმცირის მიხედვით რომელი რიგის წევრები უნდა შევინარჩუნოთ? ამისათვის ჯერ უნდა შევაფასოთ ΔQ. რადგან წირზე ინტეგრალი არის გაუსიანით შეფასება, ამიტომ უნდა გამოვთვალოთ $(\Delta Q)^2$-ის საშუალო მნიშვნელობა (IV-3.5)-ის შესაბამისი ქმედებით:

$$\left\langle\left\langle (\Delta Q)^2 \right\rangle\right. \propto \int d(\Delta Q)(\Delta Q)^2 \exp\left[i\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon^2} g(\Delta Q)^2\right] \approx O(\varepsilon) \tag{IV-3.7}$$

რადგან ε^0 რიგის ყველა წევრი L_n-დან იძლევა ქმედებაში წვლილს, ჩვენ უნდა შევინარჩუნოთ ΔQ-ს მეოთხე ხარისხის რიგის წევრები (IV-3.4)-ში. პირდაპირი გამოთვლით ვპოულობთ

$$L_n \approx \frac{1}{2\varepsilon^2} g_{ab}(\overline{Q}(n))\Delta Q^a \Delta Q^b +$$

$$+ \frac{1}{24\varepsilon^2} F^a_{,b}(\overline{Q}(n)) F^a_{,cde}(\overline{Q}(n))\Delta Q^b \Delta Q^c \Delta Q^d \Delta Q^e - \tilde{V}(\overline{Q}(n))$$

ახლა გავშალოთ იაკობიანი: რაკი სრულ იაკობიანს აქვს სახე

$$\prod_{n=1}^{N-1} g^{1/2}(Q(n)) = g^{-1/4}(Q_f) g^{-1/4}(Q_i) \prod_{n=1}^{N} g^{1/4}(Q(n)) g^{1/4}(Q(n-1)) \tag{IV-3.8}$$

ამ ნამრავლის გასაშლელად გამოვიყენოთ თანაფარდობა

$$\det(A+B) = \det A \det\left(1 + A^{-1}B\right) =$$

$$= \det A\left[1 + tr\left(A^{-1}B\right) + \frac{1}{2}\left(trA^{-1}B\right)^2 - \frac{1}{2} tr\left(A^{-1}B\right)^2 + ...\right] \tag{IV-3.9}$$

ვიპოვით

$$g^{1/4}(Q(n)) g^{1/4}(Q(n-1)) \approx$$

$$\approx g^{1/4}(\overline{Q}(n))\left[1 + \frac{1}{16}\left\{g^{ab}(\overline{Q}(n)) g_{ab,cd}(\overline{Q}(n)) + g^{ab}_{,c}(\overline{Q}(n)) g_{ab,d}\right\}\Delta Q^c(n)\Delta Q^d(n)\right] \tag{IV-3.10}$$

ჩავსვათ ეს ყველაფერი საწყის გამოსახულებაში (IV-3.1) და სათანადოდ დავალაგოთ ფაქტორები, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას ეფექტური იაკობიანისათვის

$$g^{1/2}\left(\overline{Q}\right)\left[1+\frac{1}{16}\left(g^{ab}\left(\overline{Q}\right)g_{ab,cd}\left(\overline{Q}\right)+g^{ab}_{,c}\left(\overline{Q}\right)g_{ab,d}\left(\overline{Q}\right)\right)\Delta Q^{c}\Delta Q^{d}\right]+$$
$$+g^{1/2}\left(\overline{Q}\right)\frac{i}{24\varepsilon}F^{c}_{,a}\left(\overline{Q}\right)F^{e}_{,bcd}\left(\overline{Q}\right)\Delta Q^{a}\Delta Q^{b}\Delta Q^{c}\Delta Q^{d} \qquad \text{(IV-3.11)}$$

აქ უკანასკნელი წევრი მოდის მე-4 რიგის წევრებიდან. ახლა ΔQ-ები შევცვალოთ გასაშუალოებული მნიშვნელობით. ამ პროცედურის დასაბუთება შეგვიძლია ასე: შევაჩეროთ ჩვენი ყურადღება ინტეგრაციებზე სიდიდეებით $Q(n)$ და $Q(n-1)$. შევცვლით ცვლადს $\overline{Q}(n)$-დან $\Delta Q(n)$-ზე. შემდეგ ჩავატარებთ ამ უკანასკნელით ინტეგრაციას, რაც გასაშუალოების ტოლფასია. აქ იქნება წვლილი გამოწვეული $\overline{Q}(n\pm 1)$-ით და $\Delta Q(n\pm 1)$-ით, რადგან ისინი დამოკიდებულია აგრეთვე $Q(n)$-სა და $Q(n-1)$-ზე. მაგრამ შეიძლება ჩვენება, რომ ეს წვლილი მცირეა ε რიგით და შეგვიძლია უგულვებელვყოთ. გასაშუალოებისათვის გამოვიყენებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\left\langle \Delta Q^{a}\Delta Q^{b}\right\rangle = i\varepsilon g^{ab}$$
$$\left\langle \Delta Q^{a}\Delta Q^{b}\Delta Q^{c}\Delta Q^{d}\right\rangle = (i\varepsilon)^{2}\left(g^{ab}g^{cd}+g^{ac}g^{bd}+g^{ad}g^{bc}\right) \qquad \text{(IV-3.12)}$$

ამას გამოვიყენებთ წინა ფორმულაში და მოვახდენთ ექსპონენციაციას ქმედებაში. ვიპოვით

$$\Delta V\left(\overline{Q}\right)=-\frac{1}{16}\left(g^{ab}g_{ab,cd}+g^{ab}_{,c}g_{ab,d}\right)g^{cd}+$$
$$+\frac{1}{24}F^{c}_{,a}F^{e}_{,bcd}\left(g^{ab}g^{cd}+g^{ac}g^{bd}+g^{ad}g^{bc}\right) \qquad \text{(IV-3.13)}$$

წირზე ინტეგრალის საბოლოო ფორმა იგივურია (IV-2.8) გამოსახულებისა, გარდა ფაქტორებისა $g^{-1/4}\left(Q_{f}\right)g^{-1/4}\left(Q_{i}\right)$,რომლებიც არიან იაკობიანები $|Q\rangle$-სა და$|q\rangle$-ს შორის, რაც შეესაბამება ცვლადთა გარდაქმნისას ტალღური ფუნქციის გარდაქმნას $J=g^{1/2}$ იაკობიანით.

თავი V. რადიალური კონტინუალური ინტეგრალის სივრცე-დროითი გარდაქმნა

ზემოთ სამგანზომილებიანი კვანტური სისტემები სფერულად სიმეტრიული პოტენციალებისათვის დავიყვანეთ ეფექტური ერთგანზომილებიანი სისტემების შესწავლაზე, რაც გამოიხატება ერთგანზომილებიანი რადიალური წირითი ინტეგრალების გამოთვლაში. მაგრამ,სამწუხაროდ პირდაპირი გზები ასეთი არაგაუსიანი ინტეგრალების გამოსათვლელად ჯერ არ არის დამუშავებული, ამიტომ საჭიროა გარდაქმნების მეთოდების გაფართოვება. ჩვეულებრივად შრედინგერის განტოლებით მუშაობის დროს გვიხდება საინტეგრაციო ცვლადების გარდაქმნის ხელოვნური გზების ძიება, ამიტომ, ბუნებრივია, აქაც უნდა გამოვიყენოთ ცვლადთა გარდაქმნის უფრო მძლავრი მეთოდები.

წირზე ინტეგრალის ყურადღებით განხილვა, როცა გამოიყენება დროის მესერის დაყოფის პროცესი, გვეუბნება, რომ არაწრფივი გადაქმნების დროს ოპერატორთა ნამრავლის მოწესრიგების სტოქასტურ ბუნებას მივყავართ დროზე დამოკიდებული გარდაქმნების განხილვის აუცილებლობასთან. არაწრფივი გარადაქმნების დროს ტრაექტორიები ისე იცვლება, რომ მათი ტეხილით აპროქსიმაციისათვის დროის ინტერვალების ახალი დანაწევრება უნდა შეირჩეს. ქვემოთ სწორედ ასეთი ხასიათის გარდაქმნები იქნება დემონსტრირებული.

V-1. სივრცე-დროითი გარდაქმნები ცხადი სახით

წინა პარაგრაფებიდან გავიხსენოთ რადიალური ფორმულები:

$$K_l\left(T;r_f,r_i\middle|V\right)=\int\limits_{r(0)=r_i}^{r(T)=r_f}Dr(t)\exp\left\{i\int\limits_0^T dt\left[\frac{\dot r^2}{2}-\frac{l(l+1)}{2r^2}-V(r)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}(2\pi i\varepsilon)^{-N/2}\int\limits_0^\infty\prod_{k=1}^{N-1}dr_k\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\delta_k^2}{2\varepsilon}-\varepsilon\frac{l(l+1)}{2r_kr_{k-1}}-\varepsilon V(r)\right]\right\}\qquad\text{(V-1.1)}$$

აქ, როგორც ჩვეულებრივად, რადიალური კონტინუალური ინტეგრალი განმარტებულია დროის მესერზე მესერის მუდმივით $\varepsilon=\dfrac{T}{N}$, ხოლო

$$r_k=r(t_k),\quad t_k=k\varepsilon,\quad r(0)=r_i,\quad r(T)=r_f,\quad \delta_k=r_k-r_{k-1}$$

K_l გული ნულდება, როცა $T<0$, იგი სიმეტრიულია r_i, r_f გადასმის მიმართ და აკმაყოფილებს რადიალურ გრინის ფუნქციის განტოლებას (II-1.14), იქვე მოცემული სათანადო სასაზღვრო პირობით.

ახლა განვიხილავთ კომბინირებულ გარდაქმნას $t\to\tau,\ r\to R$, სადაც შემოგვყავს ახალი “წირზე დამოკიდებული დრო” $\tau=\tau(t;r(t))$ და ახალი რადიალური ცვლადი , $R=R(\tau)$, რომელიც განისაზღვრება განტოლებებით

$$d\tau=\frac{dt}{f(r)},\qquad r=g(R)\qquad\text{და}\qquad \tau(0;r_i)=0$$

სადაც f,g არიან შესაბამისი დადებითად განსაზღვრული ფუნქციები. დავუშვებთ აგრეთვე, რომ შეზღუდვას

$$\int_0^{\tau_f} d\tau f\left(g\left(R(\tau)\right)\right) = T \qquad \text{(V-1.2)}$$

ყველა დასაშვებ წირებზე აქვს ცალსახა ამოხსნა, $\tau_f \geq 0$. ცხადია, რაკი T დაფიქსირებულია, τ "დრო" დამოკიდებული იქნება წირზე. (V-1.2) შეზღუდვა რომ გავითვალისწინოთ, წირით ინტეგრალში (V-1.1) ჩავსვათ ეს შეზღუდვა (იგივური ერთიანი)შემდეგი იგივეობით (ფადეევ-პოპოვის მეთოდი)

$$\begin{aligned} &\left[f\left(r_f\right)f\left(r_i\right)\right]^{1/2}\int_0^{\infty} d\tau_f\,\delta\left(\int_0^{\tau_f} d\tau f\left(g\left(R(\tau)\right)\right) - T\right) = \\ &= \left[f\left(r_f\right)f\left(r_i\right)\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}e^{-iET}\int_0^{\infty} d\tau_f \exp\left\{i\int_0^{\tau_f} d\tau f\left(g(R)\right)E\right\} \end{aligned} \qquad \text{(V-1.3)}$$

რასაც შევიტანთ (V-1.1) ინტეგრალქვეშ.

დროებით დავივიწყოთ წირზე ინტეგრალის სტოქასტური ბუნება. მაშინ პირდაპირი ჩასმების შემდეგ მივიღებთ:

$$N\left(r_f, r_i\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}e^{-iET}\int_0^{\infty} d\tau_f \int_{R(0)=R_i}^{R(\tau_f)=R_f} DR(\tau)\exp\left\{i\int_0^{\tau_f} d\tau\left[\frac{\dot{R}^2}{2}\frac{g'^2}{f(g)} - \frac{l(l+1)}{2}\frac{f(g)}{g^2} - f(g)\left(V(g)-E\right)\right]\right\}$$

(V-1.4)

წინ დგას გარდაქმნის იაკობიანის შესაბამისი ნორმირების მამრავლი. იმისათვის, რომ გარდაქმნის შემდეგაც მივიღოთ ახალი კვანტური სისტემა უნდა შემოვიტანოთ გარკვეული შეზღუდვები, სახელდობრ:

$$\frac{g'(R)^2}{f\left(g(R)\right)} = 1, \qquad \frac{f\left(g(R)\right)}{g^2(R)} = \frac{a}{R^2} \qquad a = const. \qquad \text{(V-1.5)}$$

ამის შემდეგ ნათელი ხდება, რომ გარდაქმნილი გული $K_{l'}\left(\tau_{f;} R_{f,} R_i \middle| W\right)$ შეგვიძლია მივაკუთვნოთ ახალ კვანტურ სისტემას ორბიტალური მომენტით l' (რაც ასეა განმარტებული $l'(l'+1) = al(l+1)$) და ახალი პოტენციალით

$$W(R) = f\left(g(R)\right)\left[V\left(g(R)\right) - E\right] \qquad \text{(V-1.6)}$$

მოცემული $V(r)$ პოტენციალისათვის შესაძლებელი უნდა იყოს ისეთი f და g ფუნქციების პოვნა (რომლებიც ამავე დროს (V-1.5) შეზღუდვებს აკმაყოფილებენ), რომ ახალი $W(R)$ პოტენციალით (V–1.4) ინტეგრალი აიღებოდეს ცხადად.

შენიშვნა: (V-1.5) პირობებთან დაკავშირებით: როგორც ეტყობა, მეთოდის ავტორებმა (I.H.Duru, H.Kleinert, Phys. Lett., **84B** (1979) 185) მხედველობიდან გაუშვეს ის ფაქტი, რომ ეს თანაფარდობები უკვე ზღუდავენ გარდაქმნებს ხარისხოვანი ფუნქციებით. მართლაც, (V-1.5)-დან გვაქვს

$$g'^2 = f, \rightarrow \left(\frac{g'}{g}\right)^2 = \frac{a}{R^2}, \rightarrow \frac{d}{dR}(\ln g) = \frac{\sqrt{a}}{R}, \rightarrow g = R^{\sqrt{a}}$$

ავტორებიც გამოიყენებენ ხარისხოვან გარდაქმნას, ოღონდ ხარისხის მაჩვენებელი არ უკავშირდება მოყვანილ კოეფიციენტს.

განვიხილოთ მარტივი ჩასმა:

$$f(r) = A_\nu r^\nu, \qquad g(R) = R^\mu \qquad \nu, \mu \in \Re \qquad \text{(V-1.7)}$$

(V-1.5) რომ დავაკმაყოფილოთ, ავიღებთ

$$\mu = \frac{2}{2-\nu}, \qquad A_\nu = \frac{4}{(2-\nu)^2}, \qquad a = A_\nu, \qquad \nu < 2 \qquad \text{(V-1.8)}$$

ახალი პოტენციალი ასე გამოიყურება

$$W_\nu(R) = \frac{4}{(2-\nu)^2} R^{\frac{2\nu}{2-\nu}} \left[V\left(R^{\frac{2}{2-\nu}} \right) - E \right] \qquad \text{(V-1.9)}$$

ამ განმარტებების შემდეგ ჩვენ უნდა დავაფიქსიროთ სათანადო მესერული ვერსია, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ჩავატაროთ გარდაქმნა წირზე ინტეგრალის მესერულ განმარტებაში. ახალ მესერზე ცვლადებს თუ ასე განვმარტავთ, $r_k = g(R_k)$, $R_k = R(\tau_k)$, მაშინ გამოდის, რომ ახალი მესერული "მუდმივა" ε'_k დამოკიდებული იქნება დაყოფის წერტილებზე ანუ k-ზე. ცვლადების გარდაქმნის შესაბამისი დისკრეტული ვერსია, რომელიც ფეინმანის გულის სიმეტრიას არ შეცვლის, მოიცემა ასე:

$$\varepsilon'_k = \varepsilon\left[f\left(g(R_k)\right) f\left(g(R_{k-1})\right)\right]^{-1/2} = \varepsilon A_\nu^{-1} \left(R_k R_{k-1} \right)^{-\frac{\nu}{2-\nu}} \qquad \text{(V-1.10)}$$

ეს გვაძლევს ინტეგრაციის ზომის გარდაქმნის შემდეგ ფორმულას წირების სივრცეში:

$$(2\pi i\varepsilon)^{-N/2} \prod_{k=1}^{N-1} dr_k = A_\nu^{-1/2} \left(R_f R_i \right)^{-\frac{\nu}{2(2-\nu)}} \prod_{k=1}^{N} \left(2\pi i \varepsilon'_k \right)^{-1/2} \prod_{k=1}^{N} dR_k$$

ე.ი.

$$Dr(t) = A_\nu^{-1/2} \left(r_f r_i \right)^{-\nu/2} DR(\tau) \qquad \text{(V-1.11)}$$

გამომდინარე აქედან, ნორმირების მამრავლი ასეთია

$$N(r_f r_i) = \frac{2}{2-\nu} \left(r_f r_i \right)^{\nu/2}$$

ახლა უკვე გასაკეთებელია მესერული სახით ჩაწერილი ქმედების გარდაქმნა. როგორც წინა პარაგრაფებში გავარკვიეთ, კინეტიკური ენერგიის წევრებში გაშლები უნდა ჩავატაროთ სიმცირის მიხედვით მეოთხე რიგამდე, ანუ

$$\frac{\delta_k^2}{\varepsilon} = \frac{\Delta_k^2}{\varepsilon'_k} + \frac{\nu(4-\nu)}{12(2-\nu)^2 R_k R_{k-1}} \frac{\Delta_k^4}{\varepsilon'_k} + O\left(\frac{\Delta_k^5}{\varepsilon'_k} \right), \qquad \Delta_k = R_k - R_{k-1} \qquad \text{(V-1.12)}$$

ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური ფორმულირებისას <u>**იტომ**</u> სტოქასტური ინტეგრალების განმარტების გამოყენებით (იხ., მაგ., H.P. Mc Kean, 'Stochastic Integrals" ,Acad.Press, New York, 1960) დაადგინა, რომ (V-1.12) გამოსახულება ეკვივალენტურია გამოსახულებისა (ექსპონენტაში):

$$\exp\left\{ i\left[\frac{\Delta_k^2}{2\varepsilon'_k} - \varepsilon'_k \frac{\nu(4-\nu)}{8(2-\nu)^2 R_k R_{k-1}} \right] \right\}$$

შენიშვნა: *შეგვიძლია დავადგინოთ რას გულისხმობს ეს ეკვივალენტობა, თუ გავიხსენებთ შემდეგ გაუსიან ინტეგრალს*

$$\int \frac{d\Delta \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta^2}{2\varepsilon} \right]}{(2\pi i\hbar\varepsilon)^{1/2}} = 1$$

აღვნიშნოთ $\varepsilon^{-1} \equiv \lambda$ *და ეს ინტეგრალი ორჯერ გავაწარმოოთ* λ*-ს მიხედვით და შევადაროთ იტოს შედეგს. მიიღება შემდეგი ეკვივალენტურობა* $\Delta^4 \to -3\varepsilon^2\hbar^2$.

ამიტომ ეს დამატებითი წევრი რადიალურ ქმედებაში ითვალისწინებს შესწორებას ცენტრგამზიდ წევრში, რომელიც იძლევა შესწორებას ეფექტურ კუთხურ მომენტში

$$L_\nu(L_\nu + 1) = l(l+1)A_\nu + \nu(4-\nu)(2-\nu)^{-2}/4$$

საიდანაც ვიპოვით

$$L_\nu = \frac{4l+\nu}{2(2-\nu)} \qquad \text{(V-1.13)}$$

თუ ამ შესწორებას გავითვალისწინებთ, დავინახავთ, რომ მიიღება წირზე ინტეგრალით წარმოდგენა, სადაც რადიალური გულია $K_{L_\nu}\left(\tau_f; R_f, R_i \middle| W_\nu\right)$, ხოლო შემავალი სიდიდეები მოიცემიან (V-1.9) და (V-1.13) განტოლებებით. გარდაქმნილი ინტეგრალისათვის წირზე ვპოულობთ

$$K_l\left(T; r_f, r_i \middle| V\right) = \frac{2}{2-\nu}\left(r_f r_i\right)^{\nu/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iET} \int_0^\infty d\tau_b K_{L_\nu}\left(\tau_f; R_f, R_i \middle| W_\nu\right) \qquad \text{(V-1.14)}$$

თუ დროზე-დამოუკიდებელ რადიალურ გულს k_l განვმარტავთ ასე

$$k_l(E; r_f, r_i|V) = i\int_0^\infty dT e^{iET} K_l\left(T; r_f, r_i \middle| V\right)$$

ადვილად დავადგენთ გარდაქმნის ფორმულას

$$k_l\left(E; r_f, r_i \middle| V\right) = \frac{2i}{2-\nu}\left(r_f r_i\right)^{\nu/4} \int_0^\infty d\tau_b K_{L_\nu}\left(\tau_f; r^{1-\nu/2}, r^{1-\nu/2} \middle| W_\nu\right) \qquad \text{(V-1.15)}$$

<u>ეს არის ამ პარაგრაფის მთავარი შედეგი</u>. იგი გვეუბნება, რომ ფეინმანის გული მოცემული პოტენციალით V და ფიქსირებული კუთხური მომენტით l უკავშირდება ფეინმანის გულს ახალი პოტენციალით W_ν და ეფექტური კუთხური მომენტით L_ν.

თუ მოცემული V პოტენციალისათვის მოვძებნით გარდაქმნას, რომლის-თვისაც (V-1.15)-ის მარჯვენა მხარე შეიძლება გამოითვალოს როგორც ენერგიის ფუნქცია, საწყისი სისტემის ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები მოიძებნება გულის სპექტრალური წარმოდგენის მეშვეობით

$$k_l\left(E; r_f, r_i \middle| V\right) = \sum_n \frac{\chi_{l,n}(r_f)\chi_{l,n}(r_i)}{E_{l,n} - E} \qquad \text{(V-1.16)}$$

ენერგიის სიბრტყეში პოლუსისა და ნაშთის განსაზღვრით.

განვმარტოთ რადიალური გრინის ფუნქცია თანაფარდობით

$$G_l\left(r_f, r_i \middle| V\right) = i\int_0^\infty dT K_l\left(T; r_f, r_i \middle| V\right) = \lim_{E\to 0} k_l\left(E; r_f, r_i \middle| V\right),$$

მაშინ წინა (V-1.15) გარდაქმნის ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი კომპაქტური სახით

$$k_l\left(E; r_f, r_i \middle| V\right) = \frac{2}{2-\nu}\left(r_f r_i\right)^{\nu/4} G_{L_\nu}\left(r_f^{1-\nu/2}, r_i^{1-\nu/2} \middle| W_\nu\right) \qquad \text{(V-1.17)}$$

V-2. მიღებული შედეგების ზოგიერთი გამოყენება

ზემოთ მიღებული ფორმულები პირველ რიგში შევამოწმოთ თვითშეთანხმებუ-ლობაზე. უმარტივესი მაგალითია თავისუფალი ნაწილაკი, როდესაც $V(r) = 0,$ $\nu = 1,\ E = k^2/2$. ვპოულობთ თავისუფალი ნაწილაკის გულისთვის თანაფარდობას:

$$k_l^0\left(E; r_f, r_i\right) = 2\left(r_f r_i\right)^{1/4} G_{2l+1/2}^{OSC}\left(\sqrt{r_f}, \sqrt{r_i}\right) \qquad \text{(V-2.1)}$$

მარჯვენა მხარეში გაჩნდა ჰარმონიული ოსცილატორის გრინის ფუნქცია $\Omega = 2ik$ წამოსახვითი სიხშირით. მართლაც, ახალი პოტენციალი (V-1.9) ფორმულის გამო არის ოსცილატორული, $W_1 = -4ER^2 \equiv \Omega^2 R^2/2$. ჰარმონიული

ოსცილატორისათვის ნამდვილი ω სიხშირეების დროს წირზე ინტეგრაცია ჩატარდება მარტივად და მიიღება

$$k_l^{OSC}(T;r_f,r_i)=\frac{(-i)^{l+3/2}\omega\sqrt{r_f r_i}}{\sin\omega T}e^{i\frac{\omega}{2}\left(r_f^2+r_i^2\right)\cot\omega T}J_{l+1/2}\left(\frac{\omega r_f r_i}{\sin\omega T}\right)\Theta(T) \qquad \text{(V-2.2)}$$

თუ ჩავატარებთ აქ საჭირო ანალიზურ გაგრძელებას და შედეგს გამოვიყენებთ (V-1.15)-ში, ბესელის ფუნქციების თვისებების გათვალისწინებით მივალთ შემდეგზე

$$K_l^0(T;r_f,r_i)=\sqrt{r_f r_i}\,\frac{(-i)^{l+3/2}}{T}e^{\frac{i}{2T}\left(r_f^2+r_i^2\right)}J_{l+1/2}\left(\frac{r_f r_i}{T}\right)\Theta(T) \qquad \text{(V-2.3)}$$

ესაა რადიალური გული. თუ პარციალურ ტალღებად გაშლის თანაფარდობებს გავიხსენებთ, ადვილად დავადგენთ, რომ თავისუფალი ნაწილაკის პროპაგატორი ყოფილა

$$K^0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)=(2\pi iT)^{-3/2}e^{\frac{i}{2T}\left(\vec{x}_f-\vec{x}_i\right)^2}\Theta(T), \qquad \text{(V-2.4)}$$

რაც ემთხვევა ადრე ჩვენს მიერ ადრე გამოთვლილ შედეგს.

–განვიხილოთ ახლა კულონური პოტენციალი

$$V(r)=-\frac{e^2}{r}$$

ავიღოთ გარდაქმნა $\nu=1$. მაშინ $f(r)=A_1 r=4r=4R^2$ ანუ $g=R^2$. აქ ჩვენ ფორსირებულად ვიყენებთ (V-1.7-8) თანაფარდობებს. გვაქვს აგრეთვე

$$W_1(R)=-4e^2-4ER^2\equiv-4e^2+\frac{\Omega^2}{2}R^2 \qquad \text{(V-2.5)}$$

ამას მივყავართ სრულ ფაქტორიზაციამდე ბმის კონსტანტისა

$$K_{2l+1/2}\left(\tau;\sqrt{r_f},\sqrt{r_i}\middle|W_1\right)=e^{i4e^2\tau}K_{2l+1/2}^{OSC}\left(\tau;\sqrt{r_f},\sqrt{r_i}\right) \qquad \text{(V-2.6)}$$

ანუ

$$k_l^H(E;r_f,r_i)=2(r_f r_i)^{1/4}k_{2l+1/2}^{OSC}\left(4e^2;\sqrt{r_f},\sqrt{r_i}\right) \qquad \text{(V-2.7)}$$

რაკი ჰარმონიული ოსცილატორის ამოხსნა ვიცით, ეს უკანასკნელი ფორმულები ხსნიან კულონის ამოცანას. მართლაც, ჩავწეროთ სპექტრალური ფორმულა ამ განტოლების ორივე მხარისათვის

$$\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{\chi_{l,n_r}^H(r_f)\chi_{l,n_r}^H(r_i)}{E_{l,n_r}^H-E}+k_l^H(cont)= \qquad \text{(V-2.8)}$$

$$=2(r_f r_i)^{1/4}\sum_{n_r=0}^{\infty}\frac{\chi_{2l+1/2,n_r}^{OSC}\left(\sqrt{r_f}\right)\chi_{2l+1/2,n_r}\left(\sqrt{r_i}\right)}{E_{2l+1/2,n_r}^{OSC}-4e^2}$$

3-განზომილებიანი ოსცილატორის ენერგიის დონეებია $E_{l,n_r}^{OSC}=\Omega(2n_r+l+3/2)$, ვპოულობთ ($\Omega=2\sqrt{-2E}$)

$$E_{2l+1/2,n_r}^{OSC}=4\sqrt{-2E}(n_r+l+1)=4\sqrt{-2E}\,n, \qquad n=n_r+1+l$$

და

$$\frac{1}{E_{2l+1/2,n_r}-4e^2}=\frac{\left(e^2+\sqrt{-2En}\right)/4n^2}{\left[-\frac{e^4}{2n^2}\right]-E}$$

(V-2.8) ფორმულაში ორივე მხარის პოლუსური სტრუქტურის შედარება უარყოფითი სრული ენერგიის დროს (ანუ ამ დროს ორივე მხარეში ნაშთების გამოთვლით) იძლევა ბალმერის ცნობილ ფორმულას წყალბადის ატომისათვის

$$E=E_n=-\frac{e^4}{2n^2}$$

კომენტარები გამოთვლების ჩასატარებლად

მივაქციოთ ყურადღება ერთ გარემოებას. ზემოთ აღწერილი მეთოდი პრაქტიკულად მხოლოდ ხარისხოვანი ყოფაქცევის პოტენციალებზე გამოდგება ეფექტურად. მაგრამ ფიზიკაში ხშირად გვხვდება პოტენციალები, რომლებიც არ არიან წმინდა ხარისხოვანი. ასეთ შემთხვევაში უფრო ეფექტური მეთოდიც არსებობს. ერთ-ერთ წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ოპერატორთა გარდაქმნის თეორია და მისი შესაბამისი ვეილის მოწესრიგება. ვნახეთ, რომ იქაც წარმოიქმნებოდა საშუალედო წერტილთან გაშლების დროს უსასრულოდ მცირე სიდიდეების ბალანსის დასაცავად კინეტიკური ენერგიის წევრში მე-4 რიგამდე გაშლის აუცილებლობა. თუ ამას გავიხსენებთ და გამოვიყენებთ ბოლოს აღწერილ მეთოდში, შეგვიძლია ზოგიერთი კორექტივი შევიტანოთ გამოთვლებში და მეთოდი განვაზოგადოთ ისე, რომ გამოდგებოდეს უკვე ნებისმიერი პოტენციალებისათვის.

შევაჩეროთ ყურადღება გარდაქმნის იმ ეტაპზე, როცა შემოდის პრაქტიკულად ნებისმიერი ფუნქციით გარდაქმნა და ახალი კვანტური სისტემის აღწერა, სახელდობრ, ფორმულები (V-1.5) და (V-1.6). უკვე ამ ეტაპზე შეგვიძლია მივიღოთ სამუშაო ფორმულად შემდეგი გამოსახულება (მკითხველი ადვილად მიხვდება სათანადო ადგილს ძირითად ტექსტში):

$$K_{l_1}\left(\tau_{f;}R_f,R_i\middle|W+\Delta V\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(2\pi i\varepsilon_k\right)^{-1/2}\int\prod_{k=1}^{N-1}dR_k\times$$
$$\times\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\left(R_j-R_{j-1}\right)^2}{2\varepsilon_j'}-\varepsilon_j'\frac{l(l+1)a}{2R_jR_{j-1}}-\varepsilon_j'g'^2\left(\overline{R}_j\right)\left[V\left(g\left(\overline{R}_j\right)\right)-E\right]-\varepsilon_j'\Delta V\left(\overline{R}_j\right)\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\int_{R(o)}^{R(T)}DR(\tau)\exp\left\{i\int_0^{\tau}d\tau\left[\frac{\dot{R}^2}{2}-\frac{l(l+1)a}{2R^2}-g'^2(R)\left[V(g(R))-E\right]-\Delta V(R)\right]\right\}\qquad\text{(V-2.9)}$$

სადაც

$$\Delta V=\frac{1}{8}\left[3\left(\frac{g''}{g'}\right)^2-2\frac{g'''}{g'}\right]\qquad\text{(V-2.10)}$$

ამრიგად, ახალ ცვლადებში საქმე გვაქვს კვანტურ სისტემასთან, რომელშიც
ა) ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიაა $W_1+\Delta V$,
ბ) ხოლო ახალი მომენტი მოიძებნება პირობიდან $l_1(l_1+1)=l(l+1)a$

ΔV-ს სტრუქტურიდან განზომილებების მოსაზრებით ჩანს, რომ უნდა გვქონდეს $\Delta V \sim \frac{1}{R^2}$. ამიტომ ეს წევრიც გაერთიანდება ცენტრგამშორ წევრთან და წვლილს შეიტანს ეფექტურ მომენტში.

ადვილი საჩვენებელია, რომ უკვე ცნობილი მაგალითისათვის ამ მეთოდით იგივე შედეგი მიიღება. მართლაც, კულონური პოტენციალისათვის ვიღებთ

$$r = g(R) = R^2; \qquad g'(R) = 2R, \quad g''(R) = 2, \quad g'''(R) = 0$$

მაშინ

$$W(R) = 4R^2\left[-\frac{e^2}{R^2} - E\right] = -4e^2 - 4ER^2 = -4e^2 + \frac{\Omega^2}{2}R^2$$

რაკი მოველით დისკრეტულ სპექტრს, როცა $E < 0$, ამიტომ $\Omega^2 = -8E > 0$. გარდა ამისა,

$$\Delta V = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{R^2} - 0\right) = \frac{3}{8R^2}, \qquad a = \frac{g'^2}{g} = 4$$

ამრიგად, ცენტრგამშორ წევრად გვაქვს

$$\frac{L(L+1)}{2R^2} = \frac{l(l+1)a}{2R^2} + \frac{3}{8R^2}$$

რაც იძლევა შედეგს

$$L(L+1) = l(l+1)4 + \frac{3}{4}, \qquad \to \qquad L = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 4l^2 + 4l}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{4l^2 + 4l + 1} = -\frac{1}{2} \pm (2l+1)$$

ამიტომაც ეფექტური მომენტია

$$L = 2l + 1/2$$

და ფურიე-სახეებისათვის მიიღება უკვე ცნობილი გამოსახულება (V-2.7).

ეკვივალენტურობასთან ერთად ეს მეთოდი უფრო გამოსადეგია, მაგალითად, ხარისხოვანზე უფრო ზოგადი პოტენცილებისათვის. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი:

– მორსის პოტენციალი $s(l=0)$-მდგომარეობაში, როცა შრედინგერის განტოლებაც ცხადად ამოიხსნება:

$$V(r) = D\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right), \qquad x = \frac{r - r_0}{r_0} = \frac{r}{r_0} - 1$$

ჩვენი მეთოდის თანახმად შემოვიღოთ ცვლადი

$$x = g(R) = -\frac{2}{\alpha}\ln R; \qquad g' = -\frac{2}{\alpha R}, \quad g'' = \frac{2}{\alpha R^2}, \quad g''' = -\frac{4}{\alpha R^3}$$

მაშინ

$$W_1 = (g')^2[V(g) - E] = \frac{4}{\alpha^2 R^2}\left[D\left(R^4 - 2R^2\right) - E\right]$$

$$\Delta V = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{R^2} - 2\frac{2}{R^2}\right) = -\frac{1}{8R^2}$$

ამიტომ

$$W_1 + \Delta V = \frac{4D}{\alpha^2}R^2 - \frac{8D}{\alpha^2} - \frac{4E}{\alpha^2 R^2} - \frac{1}{8R^2} =$$

$$= \frac{4D}{\alpha^2}R^2 - \frac{8D}{\alpha^2} - \frac{4E + 1/8}{\alpha^2 R^2}$$

მივიღეთ კვლავ სივრცული ოსცილატორი, რომლისთვისაც $\Omega^2 = \dfrac{8D}{\alpha^2}$, ხოლო ეფექტური მომენტი მოიძებნება განტოლებიდან:

$$\frac{L(L+1)}{2R^2} = \frac{{}^{4E}\!/\!_{\alpha^2} + {}^{1}\!/\!_{8}}{R^2}$$

ანუ

$$L(L+1) = \frac{8E}{\alpha^2} + \frac{1}{4} \qquad\qquad L = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8E}{\alpha}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{8E}{\alpha^2}} \equiv -\frac{1}{2} + 2\beta$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$k^M{}_L(E; r_f, r_i) = 2(r_f r_i)^{1/4} k_L^{OSC}\left(\frac{8D}{\alpha^2}; \sqrt{r_f}, \sqrt{r_i}\right),$$

რაც ოსცილატორის დონეების ფორმულის გამოყენების და სპექტრალური წარმოდგენით სარგებლობის შემდეგ მოგვცემს შედეგს:

$$E_{n_r} = -\frac{{}^{4D^2}\!/\!_{\alpha^4}}{2(n_r + 1/2 + \beta)^2}, \qquad\qquad n_r = 0,\ 1, ...$$

ესაა ჯერ განტოლება E-ს მიმართ, რადგან β შეიცავს E-ს

$$2\beta = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{8E}{\alpha^2}}$$

ამრიგად, ამოცანა დადის ტრანსცენდენტულ განტოლებაზე, რომლის ამოხსნა რიცხობრივად შეიძლება კომპიუტერზე ნებისმიერი საჭირო სიზუსტით.

ამოცანები:

ზემოაღნიშნული მეთოდებით ამოხსენით სპექტრის ამოცანა შემდეგი პოტენციალებისათვის $s(l=0)$ **- მდგომარეობაში:**

ა) ექსპონენციალური ორმო

$$V(r) = -Ae^{-\alpha r}, \qquad A, \alpha > 0$$

გამოიყენება დეიტრონის (n, p) ამოცანაში.

ბ) წრფივად ზრდადი პოტენციალი

$$V(r) = gr, \qquad g > 0.$$

გამოიყენება კვარკ-ანტიკვარკის ბმული მდგომარეობების (კონფაინმენტის) ამოცანაში.

გ) მაიე-ლენარდ-ჯონსის პოტენციალი

$$V(x) = \frac{V_0}{2\gamma}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{2\gamma} - 2\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\gamma}\right], \quad x > 0$$

გამოიყენება მოლეკულური სპექტრების ამოცანებში

დ) განზოგადებული კულონური პოტენციალი (ნებისმიერი ორბიტალური მომენტით)

$$V(r) = \frac{g}{r^2} - \frac{e^2}{r} + V_0$$

გამოიყენება წყალბადისებრი ატომების და მოლეკულების ამოცანაში.

თავი VI. კონტინუალური ინტეგრალის გამოყენება სტატისტიკურ ფიზიკაში

VI-1. განაწილების ფუნქციის წარმოდგენა

განვიხილოთ სტატისტიკური მექანიკის კანონიკური ანსამბლი. $|n\rangle$ და E_n იყოს ჰამილტონის H ოპერატორის საკუთარი მდგომარეობა და სათანადო საკუთარი მნიშვნელობა. მაშინ იმის ალბათობა, რომ სისტემას ვიპოვით $|n\rangle$ მდგომარეობაში E_n ენერგიით, მოიცემა ასე:

$$w_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_m e^{-\beta E_n}}, \qquad H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{VI-1.1}$$

ამიტომ მდგომარეობათა სიმკვრივის ოპერატორი იქნება

$$\rho = \sum_n w_n |n\rangle\langle n| = \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} |n\rangle\langle n| = \frac{e^{-\beta H}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}$$

გვაქვს

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)} = \frac{1}{Q} e^{-\beta H} \tag{VI-1.2}$$

სადაც განაწილების ფუნქციაა

$$Q = Tr\left(e^{-\beta H}\right) = \sum_n e^{-E_n/kT} = e^{-F/kT} = e^{-\beta F} \tag{VI-1.3}$$

ხოლო თავისუფალი ენერგია

$$F = -kT \ln Q = -kT \ln \sum_n e^{-E_n/kT}$$

ამავე დროს ენტროპიისათვის გვაქვს

$$S = -k \sum_n W_n \ln W_n ,$$

სადაც

$$W_n = \frac{1}{Q} e^{-E_n/kT}$$

ახლა განვიხილოთ სიმკვრივის ოპერატორი, როგორც β-ს ფუნქცია

$$\rho(\beta) = \frac{e^{-\beta H}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}$$

ან, ნორმირების გათვალისწინებით,

$$\rho_u(\beta) = e^{-\beta H}, \qquad Q = Tr(\rho_u)$$

მას არანორმირებულ სიმკვრივეს უწოდებენ.
შემდგომში ამ ინდექსს ჩამოვუშვებთ და ენერგეტიკულ წარმოდგენაში დავწერთ

$$\rho_{nm} = \delta_{nm} e^{-\beta E_n} ,$$

რაც ნიშნავს

$$\frac{\partial\rho_{nm}}{\partial\beta}=\delta_{nm}(-E_n)e^{-\beta E_n}=-E_n\rho_{nm}(\beta)$$

ანუ

$$-\frac{\partial\rho(\beta)}{\partial\beta}=H\rho(\beta),\qquad \rho(0)=1$$

ამიტომ კონფიგურაციულ სივრცეში ვპოულობთ

$$-\frac{\partial\rho(x,x';\beta)}{\partial\beta}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x,x';\beta);\qquad \rho(x,x';0)=\delta(x-x')$$

შევნიშნოთ, რომ ჩასმა $\beta\to\frac{i}{\hbar}t$ გვაბრუნებს უკან შრედინგერის განტოლე-ბისკენ. ეს ანალოგია გვაძლევს შესაძლებლობას ამ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ასე ჩავწეროთ:

$$\rho(x,x';\beta)=\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}}\exp\left[-\frac{m}{2\hbar^2\beta}(x-x')^2\right]\qquad\text{(VI-1.4)}$$

მაგალითად, ჰარმონიული ოსცილატორისათვის $H_x=p_x^2/2m+m\omega^2x^2/2$, ვპოულობთ

$$-\frac{\partial\rho}{\partial\beta}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho+\frac{m\omega^2}{2}x^2\rho,\qquad\text{(VI-1.5)}$$

რომლის ამონახსნია

$$\rho(x,x';\beta)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}}\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar\sinh\frac{\hbar\omega}{kT}}\left[\left(x^2+x'^2\right)\cosh\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-2xx'\right]\right\}\qquad\text{(VI-1.6)}$$

თავისუფალი ნაწილაკისათვის (VI-1.4) შედეგი გამომდინარეობს წირზე ინტეგრალის გამოთვლიდან $(U=\hbar\beta)$

$$\rho(x,x';U)=\int_{x(0)=x}^{x(U)=x'}Dx(u)\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^U du\frac{m\dot{x}^2(u)}{2}\right]\qquad\text{(VI-1.7)}$$

ნაწილაკისათვის V პოტენციალში ანალოგიურად გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(x,x';U)=\int_{x(0=x)}^{x(U)=x'}Dx(u)\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^U du\left[\frac{m\dot{x}^2(u)}{2}+V(x(u))\right]\right]\qquad\text{(VI-1.8)}$$

აგრეთვე საინტერესოა შპურის წარმოდგენა

$$e^{-\beta F}=Q=\int dx\rho(x,x;U)=\int dx\int_{x(0)=x}^{x(U)=x'}Dx(u)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^U du\left[\frac{m\dot{x}^2(u)}{2}+V(x(u))\right]\right\}=$$

$$=\int_{\substack{all\ closed\\ paths}}Dx(u)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^U du\left[\frac{m\dot{x}^2(u)}{2}+V(x(u))\right]\right\}\qquad\text{(VI-1.9)}$$

განაწილების ფუნქციის ამ სახის ინტეგრალური წარმოდგენა ხშირად გამოიყენება სტატისტიკურ მექანიკაში.

VI-2. წირზე ინტეგრალების გამოთვლა სტატისტიკურ მექანიკაში

როგორც უკვე ვიცით, ზუსტად გამოითვლება ფუნქციონალური ინტეგრალები, რომლებიც ექსპონენტაში კვადრატულ ფორმებს შეიცავენ. ამ ინტეგრალებს აქვთ გამოყენება სტატფიზიკაში.

ადრე განხილული ცვლადის წანაცვლების მეთოდით ასეთი ფორმებიდან ინტეგრალები გვაძლევენ საჭირო ფიზიკურ სიდიდეებს.

განვიხილოთ, მაგალითად, გამოსახულება

$$f(x_1, x_2; U) = \iint Dx(u) \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^U \frac{m\dot{x}^2(u)}{2}\right]$$

სადაც $x(0) = x_1$, $x(U) = x_2$. ეს გამოსახულება არის სიმკვრივის მატრიცის ნაწილი, როგორც ჩანს წინა პარაგრაფიდან. გავშალოთ თითოეული ტრაექტორია წრფივი ტრაექტორიის მახლობლად (x, u)-სიბრტყეში:

$$x(u) = \bar{x}(u) + y(u)$$

მაშინ მიიღება

$$f(x_1, x_2; U) = \exp\left(-\frac{m\upsilon^2 U}{2\hbar}\right)\iint Dy \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}\int_0^U du\dot{y}^2\right]$$

სადაც υ არის სიჩქარე (მუდმივი)

$$\upsilon \equiv \frac{d\bar{x}(u)}{du} = \frac{x_2 - x_1}{U}$$

რადგან $y(U) = y(0) = 0$, ჩვენი საძიებელი ინტეგრალი წირზე იხლიჩება ორ მამრავლად, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია კიდურა წერტილებზე და U-ზე, ხოლო მეორე დამოკიდებულია მარტო U-ზე. თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$F(U) \equiv \iint Dy \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}\int_0^U \dot{y}^2 du\right)$$

სიმკვრივისათვის ვპოულობთ

$$\rho(x_1, x_2; U) = F(U)\exp\left[-\frac{m(x_2 - x_1)^2}{2\hbar U}\right]$$

შეგვიძლია მივიღოთ განტოლება $F(U)$-სთვის, თუ გამოვიყენებთ წარმოდგენას

$$\rho(x, y; u_1 + u_2) = \int dx'\rho(x, x'; u_2)\rho(x', y; u_1).$$

<u>ამოცანა:</u> ***მიიღეთ განტოლება და აჩვენეთ, რომ მისი უზოგადესი უწყვეტი ამონახსნი შემდეგი სახისაა***

$$F(U) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar U}}\exp(\alpha U),$$

სადაც α ***- ნებისმიერი რიცხვია.***

ფიზიკური თვალსაზრისით ამ მუდმივის მნიშვნელობა არაარსებითია, რადგან პოტენციალის ათვლის დონე, რაც ამ სიდიდეზე ახდენს გავლენას, არაფერს არ ცვლის ამოცანის ფიზიკურ შინაარსში.

თვით ფუნქცია $F(U)$ საერთოდ არ არის საჭირო, რადგან ნებისმიერი ფიზიკური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა განიმარტება შეფარდებით

$$\langle A\rangle = \frac{Sp(\rho A)}{Sp(\rho)},$$

და ამ შეფარდებაში $F(U)$ ფუნქცია იკვეცება.

ასევე შეგვიძლია გამოვთვალოთ წირებზე ინტეგრალი ჰარმონიული ოსცილატორის ამოცანაში. აქაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულების გაშლით კლასიკური ტრაექტორიის მახლობლად პასუხს ორი ფაქტორის ნამრავლზე დავიყვანთ:

$$f\left(x_2, x_1; U\right) = \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^U\left(\frac{m\dot{\bar{x}}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2}\bar{x}^2\right)du\right]F(U)$$

სადაც

$$F(U) = \iint \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^U du\left(\frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2}y^2\right)\right]$$

ამოცანა: *დაამტკიცეთ ეს თანაფარდობანი.*

V-3. ვარიაციული პრინციპი წირებზე ინტეგრალისათვის

როგორც სტატფიზიკის კურსიდან არის ცნობილი, თავისუფალი ენერგიისათვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$F \le F_0 + \left\langle H - H_0 \right\rangle_0 \qquad \text{(VI-3.1)}$$

ან

$$F \le \left\langle H \right\rangle_0 - TS_0 \qquad \text{(VI-3.2)}$$

რომელიც ჩაწერილია ორი ჰამილტონიანისათვის H და H_0. როგორ შეგვიძლია სათანადო თანაფარდობების ჩაწერა წირებზე ინტეგრალის გამოყენებით?

სტატისტიკური ჯამისათვის გვაქვს

$$e^{-\beta F} = \iiint_{x(0)=x(U)} e^{-S[x(u)]}Dx(u) \qquad \text{(VI-3.3)}$$

ვთქვათ S-ის ნაცვლად ვიხილავთ სხვა ფუნქციონალს S_0 (არ ავურიოთ ენტროპიაში)., რომელთანაც, ითვლება, რომ გამოთვლების ჩატარება უფრო ადვილია. მაშინ (VI-3.3) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$e^{-\beta F} = \frac{\iint Dx \exp\left[-\left(S - S_0\right)\right]\exp\left(-S_0\right)}{\iint Dx \exp\left(-S_0\right)} e^{-\beta F_0}, \qquad \text{(VI-3.4)}$$

სადაც

$$e^{-\beta F_0} \equiv \iint e^{-S_0} Dx \qquad \text{(V-3.5)}$$

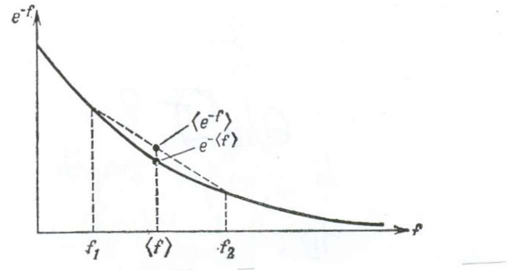
(V-3.4) გამოსახულების მრიცხველში მდგომ მამრავლს აქვს საშუალოს სახე $\exp\left[-\left(S - S_0\right)\right]$-დან e^{-S_0} წონით გარკვეული $x(u)$ ტრაექტორიისათვის. ამიტომ ეს გამოსახულება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$e^{-\beta F} = \left\langle e^{-\left(S - S_0\right)}\right\rangle_{S_0} e^{-\beta F_0} \qquad \text{(V-3.6)}$$

დავუშვათ, რომ S და S_0 არიან ნამდვილი სიდიდეები და გამოვიყენოთ უტოლობა

$$\left\langle e^{-f}\right\rangle \ge e^{-\langle f \rangle} \qquad \text{(V-3.7)}$$

ამ უტოლობას აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (იხ. ნახაზი 9).



ნახაზი 9

მრუდი $\left\langle e^{-f}\right\rangle$ ყოველთვის ძევს $e^{-\langle f\rangle}$ მრუდის მაღლა. და ეს უტოლობა არ არის იმაზე დამოკიდებული, თუ რა კანონით არის განაწილებული f სიდიდე. მივუყენოთ (VI-3.7) წინა (VI-3.6) თანაფარდობას, ვღებულობთ:

$$e^{-\beta F} \geq e^{-\langle S-S_0\rangle} e^{-\beta F_0}, \qquad \text{(VI-3.8)}$$

სადაც

$$\langle S-S_0\rangle \equiv \frac{\iint (S-S_0) e^{-S_0} Dx}{\iint e^{-S_0} Dx} \qquad \text{(VI-3.9)}$$

როგორც წესი, (VI-3.9) გამოსახულების გამოთვლა უფრო ადვილია, ვიდრე (VI-3.4)- სა. ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი თეორემა

$$F \leq F_0 + \frac{1}{\beta}\langle S-S_0\rangle_{S_0} \qquad \text{(VI-3.10)}$$

ამოცანა: ***ვთქვათ,***

$$S = \int_0^{\beta}\left[\frac{m\dot{x}^2(u)}{2} + V(x(u))\right]du$$
$$S_0 = \int_0^{\beta}\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x(u))\right]du \qquad \textbf{(VI-3.11)}$$

აჩვენეთ, რომ

$$\frac{1}{\beta}\langle S-S_0\rangle = \langle V-V_0\rangle_0$$

ამრიგად, (VI-3.10) თანაფარდობა შეიცავს (VI-3.1,2) თანაფარდობებს, როგორც კერძო შემთხვევას.

VII. მაწარმოებელი ფუნქციონალი

როგორც ქვემოთ დავინახავთ, ფუნქციონალური მეთოდები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ გრინის ფუნქციების, წვეროების, გაფანტვის ამპლიტუდების და ა.შ. სხვა ფიზიკური სიდიდეების გამოთვლებისათვის. ეს უკანასკნელნი, როგორც ვიცით, გამოისახებიან ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალების მეშვეობითაც. ამიტომ მათი შესწავლა და მეთოდების დამუშავება ერთ-ერთი მთავარი ამოცანაა თეორიის აგებისას. საინტერესოა და ბუნებრივი, რომ ამ გზაზე შეგვხვდება გადასალახი მრავალი მათემატიკური ხასიათის სირთულე, რომელთაგან მნიშვნელოვანი ნაწილი ქვემოთ იქნება გადმოცემული. პირველ რიგში აუცილებელია სხვადასხვა გრინის (ანუ კორელაციური) ფუნქციების მათემატიკურად კორექტული განმარტებები და, რა თქმა უნდა, მათი ფიზიკური ინტერპრეტაცია. დავიწყოთ ერთ-ერთი პრინციპული საკითხით – ევკლიდური სიდიდეების შემოყვანით.

VII-1. ევკლიდური მობრუნება

ჩვენ ადრე ვნახეთ, რომ ბევრ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სტანდარტულ გაუსიან ინტეგრალებთან (რომლებშიც ექსპონენტის მაჩვენებელი არის კვადრატული). სახელდობრ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iax^2} = \left(\frac{i\pi}{a}\right)^{1/2}$$

ამოცანის სახით განვიხილეთ ამის განზოგადება $n \times n$ მატრიცების შემთხვევაზე

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{i\eta^T A\eta} = \left(\frac{(i\pi)^n}{\det A}\right)^{1/2}$$

სადაც A არის ერმიტული მატრიცა. შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ ეს შედეგი ძალაში რჩება თუ ამ მატრიცას შევცვლით ერმიტული ოპერატორით. სხვა სიტ-ყვებით, შეგვეძლება დავწეროთ

$$\int D\eta \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt\eta(t)O(t)\eta(t)\right] = N\left[\det O(t)\right]^{-1/2}$$

სადაც $O(t)$ არის ერმიტული ოპერატორი და N არის არაარსებითი ნორმირების მუდმივი.

ამ ფორმულის დასაბუთებისათვის დავიწიოთ ცოტა უკან ჰარმონიული ოსცილატორის ამოცანისკენ და გავიხსენოთ, რომ გვაინტერესებდა ინტეგრალი

$$\int D\eta \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(\frac{m\dot{\eta}^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\eta^2\right)\right] = \int D\eta \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(\dot{\eta}^2 - \omega^2\eta^2\right)\right] =$$

$$= \int D\eta \exp\left[-\frac{im}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\eta(t)\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)\eta(t)\right] \qquad \text{(VII-1.1)}$$

სასაზღვრო პირობით $\eta(t_i)=\eta(t_f)=0$. ამ ინტეგრალის მნიშვნელობა ადრე გამოვთვალეთ და იგი ტოლია სიდიდისა

$$A^n\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right)^{-1/2}, \qquad T=t_f-t_i\,.$$

ეს ინტეგრალი გამოვთვალეთ დროის ინტერვალის დისკრეტიზაციით მიღებული მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლით. ახლა გამოვთვალოთ ოპერატორის დეტერმინანტი ცხადად და შევადაროთ ძველ შედეგს.

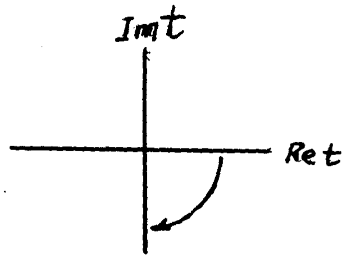
პირველი პრობლემა, რასაც აქ ვხვდებით, არის ის, რომ ხარისხის მაჩვენებელი ოსცილირებს და ინტეგრალი უნდა განვმარტოთ რეგულარულად. ცხადია შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი ოსცილატორული გაუსიანი ინტეგრალის განმარტება. სახელდობრ,

$$\int D\eta \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\left(\dot{\eta}^2-\omega^2\eta^2\right)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int D\eta\exp\left[-\frac{im}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\eta(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2-i\varepsilon\right)\right]\eta(t) \qquad \text{(VII-1.2)}$$

ეს უზრუნველყოფს ინტეგრალქვეშა გამოსახულების სწორ დაცემას და მიგვიყვანს ფეინმანის გრინის ფუნქციებთან. სხვა სიტყვებით, წირებზე ინტეგრალი ბუნებრივად შეიცავს მიზეზობრივ სასაზღვრო პირობებს.

არსებობს ალტერნატიული, მაგრამ ეკვივალენტური გზა წირზე ინტეგრალის განმარტებისა, რაც მდგომარეობს ყველა ინტეგრალის ანალიზურ გაგრძელებაში წარმოსახვითი დროისკენ კომპლექსურ t სიბრტყეში. ცხადად ეს ასე გამოიყურება

$$t \;\to\; t'=-i\tau, \qquad \tau \;\; real. \qquad \text{(VII-1.3)}$$



ნახაზი 10

ასეთი გაგრძელებით ჩვენი ინტეგრალი (VII-1.1) ტოლია

$$\int D\eta\exp\left[-\frac{im}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\eta(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)\eta(t)\right]\to$$

$$\to\int D\eta\exp\left[-\frac{m}{2\hbar}\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\eta(\tau)\left(-\frac{d^2}{d\tau}+\omega^2\right)\eta(\tau)\right]=$$

$$N'\int D\eta\exp\left[-\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\eta(\tau)\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)\eta(\tau)\right] \qquad \text{(VII-1.4)}$$

აქ ცვლადის შეცვლასთან დაკავშირებული იაკობიანის შესწორება შეტანილია ახალ მუდმივში.

მიღებული გამოსახულების მარჯვენა მხარე არის უკვე კარგად განსაზღვრული სიდიდე, რადგან ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ექსპონენციალურად ეცემა (ანალიზურად გაგრძელებულ ოპერატორს აქვს დადებითად განსაზღვრული სპექტრი). ახლა ინტეგრალს გამოვთვლით და ანალიზურად გამოვაგრძელებთ უკან რეალური დროისაკენ ჩასმით

$$\tau \to \tau' = it, \qquad t\ real$$

ჩვენ გვაინტერესებს დეტერმინანტი, რომელიც უნდა გამოითვალოს ფუნქციათა სივრცეში, რომლებიც დასმულ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ, $\eta(\tau_{i,f}) = 0$. ამიტომაც უნდა ამოვხსნათ განტოლება საკუთარ მნიშვნელობებზე

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right)\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

რომლის ნორმირებული ამონახსნები ადვილად მოიძებნება და არის

$$\psi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\tau_f - \tau_i}} \sin\frac{n\pi(\tau_f - \tau_i)}{\tau_f - \tau_i} \qquad \text{(VII-1.5)}$$

შესაბამისი საკუთარი მნიშვნელობებია

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\tau_f - \tau_i}\right)^2 + \omega^2 \qquad \text{(VI-1.6)}$$

ამიტომ ვასკვნით, რომ საძიებელი ოპერატორის დეტერმინანტი არის

$$\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\tau_f - \tau_i}\right)^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{\omega(\tau_f - \tau_i)}{n\pi}\right)^2\right) =$$

$$= B\frac{\sinh \omega(\tau_f - \tau_i)}{\omega(\tau_f - \tau_i)} \qquad \text{(VII-1.7)}$$

უკან ანალიზურად გამოგრძელების შემდეგ ვპოულობთ

$$\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right) \to \det\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) = A\frac{\sin\omega(t_f - t_i)}{\omega(t_f - t_i)} = A\frac{\sin\omega T}{\omega T} \qquad \text{(VII-1.8)}$$

ეს გამოსახულება, ცხადია დაკავშირებულია წირზე ადრე განხილულ ინტეგრალთან. ამიტომ, ვასკვნით, რომ

$$\int D\eta \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\left(\dot{\eta}^2 - \omega^2\eta^2\right)\right] = A''\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right)^{-1/2} = N\left(\det\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)\right)^{-1/2} \qquad \text{(VII-1.9)}$$

შემდგომში ამ შედეგს განვაზოგადებთ ველის თეორიაზე, თავისუფლების ხარისხთა უსასრულო რაოდენობის შემთხვევაში.

VII-2. კორელაციური ფუნქციები

განვიხილოთ ჰაიზენბერგის წარმოდგენის ოპერატორების დროში მოწესრიგებული ნამრავლის მატრიცული ელემენტი ${}_H\langle x_f, t_f | T(X_H(t_1)X_H(t_2)) | x_i, t_i\rangle_H$.. ავიღოთ მიმდევრობა $t_1 > t_2$. მაშინ სრული კრებულის გამოყენებით ვწერთ:

$$
{}_H\langle x_f,t_f|X_H(t_1)X_H(t_2)|x_i,t_i\rangle_H =
$$

$$
=\int dx_1dx_2\,{}_H\langle x_f,t_f|X_H(t_1)|x_1,t_1\rangle_H\,{}_H\langle x_1,t_1|X_H(t_2)|x_2,t_2\rangle_H\,{}_H\langle x_2,t_2|x_i,t_i\rangle_H =
$$

$$
=\int dx_1dx_2x_1x_2\,{}_H\langle x_f,t_f|x_1,t_1\rangle_H\,{}_H\langle x_1,t_1|x_2,t_2\rangle_H\,{}_H\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle_H
$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი შინაგანი ნამრავლი ამ გამოსახულებაში არის გადასვლის ამპლიტუდა და ამიტომ, ჩაიწერება წირითი ინტეგრალის მეშვეობით. ნამრავლების კომბინირებით ვწერთ:

$$
{}_H\langle x_f,t_f|X_H(t_1)X_H(t_2)|x_i,t_i\rangle_H = N\int Dxx(t_1)x(t_2)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S[x]\right] \qquad \text{(VII-2.1)}
$$

ანალოგიურად, როცა $t_2>t_1$, გვაქვს

$$
{}_H\langle x_f,t_f|X_H(t_2)X_H(t_1)|x_i,t_i\rangle_H = N\int Dxx(t_1)x(t_2)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S[x]\right] \qquad \text{(VII-2.2)}
$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ ინტეგრალქვეშ $x(t_1),x(t_2)$ არიან კლასიკური სიდიდეები და ერთმანეთთან კომუტირებენ. ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$
{}_H\langle x_f,t_f|T(X_H(t_1)X_H(t_2))|x_i,t_i\rangle_H = N\int Dxx(t_1)x(t_2)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x]\right) \qquad \text{(VII-2.3)}
$$

სინამდვილეში, ნებისმიერი რაოდენობის ოპერატორების დროში მოწესრიგებული ნამრავლი გვაძლევს კორელაციურ ფუნქციებს წირებზე ინტეგრალის სახით:

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle x_f,t_f|T(O_1(X_H(t_1))...O_n(X_H(t_n)))|x_i,t_i\rangle_H = \\
&= N\int DxO_1(x(t_1))...O_n(x(t_n))\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x]\right)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-2.4)}
$$

წირზე ინტეგრალის მიმზიდველობა იმაშია, რომ მარჯვენა მხარეში გვაქვს მარტო კლასიკური სიდიდეები და არა ოპერატორები.

გამოყენებებში საჭირო ხდება გადასვლის ამპლიტუდების დათვლა რაიმე ფიზიკურ მდგომარეობებს შორის და არა მხოლოდ ორ კოორდინატულ მდგომარეობებს შორის. სახელდობრ, დაგვაინტერესებს ვიცოდეთ სისტემის საწყისი ფიზიკური მდგომარეობიდან $|\psi_i\rangle$ დროის t_i მომენტში საბოლოო $|\psi_f\rangle$ მდგომარეობაში დროის t_f მომენტში გადასვლის ალბათობა. ესაა ის, რასაც ითხოვს S- მატრიცის მატრიცული ელემენტების ცოდნა.

განმარტების თანახმად, გადასვლის ამპლიტუდა მოიცემა ასე:

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle \psi_f|\psi_i\rangle_H = \\
&=\int dx_fdx_i\,{}_H\langle\psi_f|x_f,t_f\rangle_H\,{}_H\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_H\,{}_H\langle x_i,t_i|\psi_i\rangle_H = \\
&= N\int dx_fdx_i\psi_f^*(x_f,t_f)\psi_i(x_i,t_i)\int Dx\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x]\right)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-2.5)}
$$

აქ გამოყენებულია ჩვეულებრივი კვანტურ-მექანიკური განმარტება

$$
{}_H\langle x,t|\psi\rangle_H=\psi(x,t)
$$

ასევე შეგვიძლია ჩავწეროთ დროში მოწესრიგებული ნებისმიერი კორელაციური ფუნქცია

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle\psi_f|T(O_1(X_H(t_1))...O_n(X_H(t_n)))|\psi_i\rangle_H = \\
&= N\int dx_fdx_i\psi_f^*(x_f,t_f)\psi_i(x_i,t_i)\int DxO_1(x(t_1))...O_n(x(t_n))\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x]\right)
\end{aligned} \qquad \text{(VII-2.6)}
$$

გამოთვლებში ხშირად გვაინტერესებს საშუალო მნიშვნელობები. სწორი ნორმირებისთვის ასე წერენ

$$\begin{aligned}&\left\langle T\left(O_1\left(X_H\left(t_1\right)\right)...O_n\left(X_H\left(t_n\right)\right)\right)\right\rangle = \\ &= \frac{{}_H\left\langle \psi_i \left| T\left(O_1\left(X_H\left(t_1\right)\right)...O_n\left(X_H\left(t_N\right)\right)\right)\right| \psi_i\right\rangle_H}{{}_H\left\langle \psi_i | \psi_i\right\rangle_H} = \\ &= \frac{\int dx_f dx_i \psi_i^*\left(x_f, t_f\right)\psi_i\left(x_i, t_i\right)\int Dx O_1\left(x\left(t_1\right)\right)...O_n\left(x\left(t_n\right)\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x]\right)}{\int dx_f dx_i \psi_i^*\left(x_f, t_f\right)\psi_i\left(x_i, t_i\right)\int Dx \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x]\right)}\end{aligned} \qquad \text{(VII-2.7)}$$

ამის შემდეგ ჰაიზენბერგის სურათის ინდექსს ჩამოვუშვებთ.

ახლა შევნიშნოთ, რომ შეგვიძლია კორელაციური ფუნქციების გენერირება მარტივი გზით თუკი გარეშე წყაროსაც გამოვიყენებთ. განვმარტოთ მოდიფი-ცირებული ქმედება ასეთნაირად

$$S[x, J] = S[x] + \int_{t_i}^{t_f} dt J(t) x(t) \qquad \text{(VII-2.8)}$$

სისტემის დინამიკას განსაზღვრავს ქმედება $S[x] = S[x, 0]$. განვმარტოთ ასევე

$$\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J = N \int dx_f dx_i \psi_i^*\left(x_f, t_f\right)\psi_i\left(x_i, t_i\right)\int Dx \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x, J]\right) \qquad \text{(VII-2.9)}$$

ნათელია, რომ

$$\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_{J=0} = \left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle$$

ამავე დროს, როცა $t_f \geq t_1 \geq t_i$, ვპოულობთ

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J}{\delta J\left(t_1\right)} = N \int dx_f dx_i \psi_i^*\left(x_i, t_f\right)\psi_i\left(x_i, t_i\right)\int Dx \frac{i}{\hbar}\frac{\delta S[x, J]}{\delta J\left(t_1\right)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x, J]\right) = \\ &= N \int dx_f dx_i \psi_i^*\left(x_f, t_f\right)\psi_i\left(x_i, t_i\right)\int Dx \frac{i}{\hbar}x\left(t_1\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x, J]\right)\end{aligned} \qquad \text{(VII-2.10)}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\left.\frac{\delta\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J}{\delta J\left(t_1\right)}\right|_{J=0} = \frac{i}{\hbar}\left\langle \psi_i \left| X_H\left(t_1\right)\right| \psi_i \right\rangle$$

ანალოგიურად, როცა $t_f \geq t_1, t_2 \geq t_i$

$$\left.\frac{\delta^2\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J}{\delta J\left(t_1\right)\delta J\left(t_2\right)}\right|_{J=0} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\left\langle \psi_i \left| T\left(X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right)\right| \psi_i \right\rangle$$

საზოგადოდ, მარტივად მტკიცდება, რომ

$$\left.\frac{\delta^n\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J}{\delta J\left(t_1\right)...\delta J\left(t_n\right)}\right|_{J=0} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\left\langle \psi_i \left| T\left(X\left(t_1\right)...X\left(t_n\right)\right)\right| \psi_i \right\rangle \qquad \text{(VII-2.11)}$$

შესაბამისად,

$$\begin{aligned}&\left\langle T\left(X\left(t_1\right)...X\left(t_n\right)\right)\right\rangle = \frac{\left\langle \psi_i \left| T\left(X\left(t_1\right)...X\left(t_n\right)\right)\right| \psi_i \right\rangle}{\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle} = \\ &= \frac{\left(-i\hbar\right)^n}{\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J}\left.\frac{\delta^n\left\langle \psi_i | \psi_i \right\rangle_J}{\delta J\left(t_1\right)...\delta J\left(t_n\right)}\right|_{J=0}\end{aligned} \qquad \text{(VII-2.12)}$$

ამის გამო $\langle\psi_i|\psi_i\rangle_J$-ს ხშირად დროში მოწესრიგებული კორელაციური ფუნქციების მაწარმოებელ ფუნქციონალსაც უწოდებენ.

VII-3. ვაკუუმური ფუნქციონალი

ველის კვანტურ თეორიაში საინტერესო სიდიდეა ვაკუუმიდან ვაკუუმში გადასვლის ამპლიტუდა გარეშე წყაროს არსებობისას. მის საპოვნელად გავიხსენოთ გადასვლის ამპლიტუდა კოორდინატულ სივრცეში:

$$\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_J = N\int Dx\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right) = N\int Dx\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x]+\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dtJ(t)x(t)\right\}$$

ეს სიდიდე ამავე დროს არის

$$\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_J = N\int Dx\exp\left[\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right] = \left\langle x_f,t_f\left|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dtX(t)J(t)\right]\right)\right|x_i,t_i\right\rangle \qquad \text{(VII-3.1)}$$

ახლა ავიღოთ ზღვარი

$$t_i\to-\infty, \qquad t_f\to\infty$$

სხვა სიტყვებით, გვინდა გამოვთვალოთ ამპლიტუდა იმის ალბათობისა, რომ სისტემა საწყისი მდგომარეობიდან (უსასრულო წარსული) გადავა საბოლოო მდგომარეობაში (უსასრულო მომავალი) გარეშე წყაროს თანდასწრებით. ამ ზღვარს გამოვთვლით ადიაბატური ჰიპოტეზით:

$$J(t)=0\,, \qquad \text{როცა} \quad |t|>\tau$$

და ავიღებთ ზღვარს, როცა $\tau\to\infty$.

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_J = N\int Dx\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(L(x,\dot{x})+Jx\right)\right) \qquad \text{(VII-3.2)}$$

ალტერნატიულად, (VI-3.1)-დან

$$\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_J = \lim_{\tau\to\infty}\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\left\langle x_f,t_f\left|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\tau}^{\tau}dtJX\right]\right)\right|x_i,t_i\right\rangle \qquad \text{(VII-3.3)}$$

შემდეგ დავუშვათ, რომ ძირითადი მდგომარეობის ენერგია ნორმირებულია ნულზე, ასე რომ

$$H|0\rangle=0$$

$$H|n\rangle=E_n|n\rangle, \qquad E_n>0$$

სრული კრებულის გათვალისწინებით გადასვლის ამპლიტუდისათვის ვიპოვით

$$\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\langle x_f,t_f|x_i,t_i\rangle_J = \lim_{\tau\to\infty}\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\sum_{n,m}\langle x_f,t_f|n\rangle\left\langle n\left|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\tau}^{\tau}dtJX\right]\right)\right|m\right\rangle\langle m|x_i,t_i\rangle =$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\sum_{n,m}\left\langle x_f\left|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Ht_f\right]\right|n\right\rangle\left\langle n\left|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\tau}^{\tau}dtJX\right]\right)\right|m\right\rangle\left\langle m\left|\exp\left[\frac{i}{\hbar}Ht_i\right]\right|x_i\right\rangle =$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\lim_{\substack{t\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\sum_{n,m}e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t_f+\frac{i}{\hbar}E_m t_i}\left\langle x_f\left|n\right\rangle\left\langle n\right|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\tau}^{\tau}dtJX\right]\right)\left|m\right\rangle\left\langle m\right|x_i\right\rangle$$

$t\to\pm\infty$ ზღვრებში ექსპონენტები ოსცილირებენ ნულისკენ ყველა მდგომარეობისათვის ძირითადის გარდა. ამის დანახვა სხვანაირადაც შეგვიძლია წარმოსახვითი დროისკენ ანალიზური გაგრძელებით. მიიღება

$$\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\left\langle x_f,t_f\left|x_i,t_i\right\rangle=\lim_{\tau\to\infty}\left\langle x_f\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\tau}^{\tau}dtJX\right]\right)\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|x_i\right\rangle=$$
$$=\left\langle x_f\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|x_i\right\rangle\left\langle 0\right|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dtJX\right]\right)\left|0\right\rangle \tag{VII-3.4}$$

ამრიგად

$$\left\langle 0\right|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dtJX\right]\right)\left|0\right\rangle=\lim_{\substack{t_i\to-\infty\\ t_f\to\infty}}\frac{\left\langle x_f,t_f\left|x_i,t_i\right\rangle_J}{\left\langle x_f\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|x_i\right\rangle} \tag{VII-3.5}$$

მარცხენა მხარე დამოუკიდებელია კიდურა წერტილებზე და, ამიტომ, მარჯვენა მხარეც დამოუკიდებელი უნდა იყოს. გარდა ამისა, მარჯვენა მხარეს აქვს წირზე ინტეგრალის სტრუქტურა. ამიტომ (VII-3.5) შეგვიძლია ასედაც დავწეროთ

$$\left\langle 0\right|T\left(\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dtJX\right]\right)\left|0\right\rangle=\left\langle 0|0\right\rangle_J=N\int Dx\exp\left[\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right] \tag{VII-3.6}$$

სადაც

$$S[x,J]=\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(L(x,\dot{x})+Jx\right)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ განვმარტავთ

$$Z[J]=\left\langle 0|0\right\rangle_J=N\int Dx\exp\left[\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right] \tag{VII-3.7}$$

მაშინ გვექნება

$$\left.\frac{(-i\hbar)^n}{Z[J]}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)}\right|_{J=0}=\left\langle T\left(X(t_1)\ldots X(t_n)\right)\right\rangle \tag{VII-3.8}$$

ე.ი. $Z[J]$ აწარმოებს დროში მოწესრიგებულ კორელაციურ ფუნქციებს ანუ გრინის ფუნქციებს ვაკუუმში. თუ გვეცოდინება ვაკუუმური გრინის ფუნქციები, ავაგებთ გაფანტვის S-მატრიცას. ველის კვანტურ თეორიაში ეს ფუნქციები ასრულებენ ცენტრალურ როლს. $Z[J]$-ს სათანადოდ ეწოდება ვაკუუმური ფუნქციონალი ან ვაკუუმური გრინის ფუნქციების მაწარმოებელი ფუნქციონალი.

კვანტურ მექანიკაში ვხვდებით სხვადასხვა სტატისტიკურ გადახრებს საშუალო მნიშვნელობიდან. ეს შეიძლება მივიღოთ წირზე ინტეგრალის ფორმალიზმში შემდეგნაირად: განვმარტოთ

$$Z[J]=\exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right)$$

ან

$$W[J]=-i\hbar\ln Z[J] \tag{VII-3.9}$$

რადგან კვანტურ მექანიკაში გადასვლის ამპლიტუდისათვის წირზე ინტეგრალი პროპორცულია ექსპონენტისა კლასიკური ქმედებიდან, ამ მიზეზით $W[J]$-ს ეფექტურ ქმედებას უწოდებენ. განმარტებით

$$\left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(t_1)}\right|_{J=0} = (-i\hbar)\frac{1}{Z[J]}\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)}\right|_{J=0} = \langle X(t_1)\rangle \tag{VII-3.10}$$

შემდეგ

$$\begin{aligned}
&(-i\hbar)\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0} = (-i\hbar)^2\left.\left(\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)} - \frac{1}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_2)}\right)\right|_{J=0}\\
&= \langle T(X(t_1)X(t_2))\rangle - \langle X(t_1)\rangle\langle X(t_2)\rangle =\\
&= \langle T((X(t_1)-\langle X(t_1)\rangle)(X(t_2)-\langle X(t_2)\rangle))\rangle
\end{aligned} \tag{VII-3.11}$$

ესაა საშუალო მნიშვნელობის მეორე რიგის წარმოებული. ანალოგიურად ვიპოვით

$$\begin{aligned}
&(-i\hbar)^3\left.\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\delta J(t_3)}\right|_{J=0} =\\
&= \langle T((X(t_1)-\langle X(t_1)\rangle)(X(t_2)-\langle X(t_2)\rangle)(X(t_3)-\langle X(t_3)\rangle))\rangle
\end{aligned}$$

შეგვიძლია განვაგრძოთ და მივიღოთ უფრო რთული ფორმები. ვხედავთ, რომ $W[J]$ გენერირებს სხვადასხვა სტატისტიკურ გადახრებს და მათ მომენტებს. ველის კვანტურ თეორიაში ეს არის ე.წ. ბმული ვაკუუმური გრინის ფუნქციების მაწარმოებელი ფუნქციონალი.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი ჰარმონიული ოსცილატორი.

$$\begin{aligned}
Z[J] &= N\int Dx \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 + Jx\right)\right] =\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} N\int Dx \exp\left[-\frac{im}{2\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(x(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2 - i\varepsilon\right)x(t) - \frac{2}{m}J(t)x(t)\right)\right]
\end{aligned}$$

გავიხსენოთ, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2 - i\varepsilon\right)G_F(t-t') = -\delta(t-t')$$

ახლა შემოვიტანოთ ახალი კანონიკური კოორდინატა

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} dt' G_F(t-t')J(t')$$

მაწარმოებელი ფუნქციონალი იღებს სახეს

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} N\int D\tilde{x} \exp\left[-\frac{im}{2\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\tilde{x}(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2 - i\varepsilon\right)\tilde{x}(t)\right]\times\\
&\quad\times \exp\left[-\frac{i}{2m\hbar}\iint_{-\infty} dt dt' J(t)G_F(t-t')J(t')\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} N\left[\det\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2 - i\varepsilon\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{i}{2m\hbar}\iint_{-\infty} dt dt' J(t)G_F(t-t')J(t')\right] =\\
&= Z[0]\exp\left[-\frac{i}{2m\hbar}\iint_{-\infty} dt dt' J(t)G_F(t-t')J(t')\right]
\end{aligned} \tag{VII-3.12}$$

ახლა უკვე პირდაპირ ვიპოვით

$$\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0} = -\frac{i}{m\hbar}G_F(t_1-t_2)Z[J] \qquad \text{(VII-3.13)}$$

შესაბამისად ჰარმონიული ოსცილატორისათვის გვაქვს

$$\langle T(X(t_1)X(t_2))\rangle = (-i\hbar)^2\frac{1}{Z[J]}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\right|_{J=0} =$$

$$= (-i\hbar)^2\left(-\frac{i}{m\hbar}\right)G_F(t_1-t_2) = \frac{i\hbar}{m}G_F(t_1-t_2) \qquad \text{(VII-3.14)}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ მაგალითში ორწერტილოვანი დროში მოწესრიგებული ვაკუუმური კორელაციური ფუნქცია გვაძლევს ფეინმანის გრინის ფუნქციას, ანუ ორწერტილოვანი ვაკუუმური ბმული გრინის ფუნქცია სხვა არაფერია, თუ არა ფეინმანის პროპაგატორი.

VII-4. ევკლიდური გრინის ფუნქციები

არაფიზიკური სასაზღვრო პირობების გამო, $t_i \to -i\infty$, $t_f \to i\infty$ ზემოთ აღწერილი გრინის ფუნქციები უნდა გავიგოთ, როგორც "ევკლიდური" გრინის ფუნქციები, რომლებიც განიმარტება შემდეგნაირად:

$$S^{(n)}(\tau_1,...,\tau_n) = i^n G^{(n)}(-i\tau_1,...,-i\tau_n) \qquad \text{(VII-4.1)}$$

მაშინ მისთვის მაწარმოებელი ფუნქციონალი შეიძლება შემოვიტანოთ ასე:

$$W_E[J] =$$

$$= \lim_{\substack{\tau_i\to\infty \\ \tau_f\to-\infty}}\int Dx\exp\left\{\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau''\left[-\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau''}\right)^2 - V(x) + J(\tau'')x(\tau'')\right]\right\} \qquad \text{(VII-4.2)}$$

ამავე დროს

$$S^{(n)}(\tau_1,...,\tau_n) = \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(\tau_1)...\delta J(\tau_n)}\right|_{J=0}$$

არაფიზიკურ ზღვრებს აზრი აქვთ "ევკლიდურ სივრცეში", გარდა ამისა, ფუნქციონალური ინტეგრალი ამ სივრცეში კარგად არის განმარტებული, თუ $V(x)$ პოტენციალი შემოსაზღვრულია ქვემოდან. ეს იმიტომაა შესაძლებელი, რომ როგორც ზემოთაც იყო აღნიშნული, თუ პოტენციალის ათვლას ნულიდან დავიწყებთ, მაშინ

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) > 0 \qquad \text{(VI-4.3)}$$

ამ დროს ექსპონენციალური მამრავლი (VII-4.2) ფორმულაში განაპირობებს ფუნქციონალური ინტეგრალის კრებადობას. შევნიშნოთ, რომ (VII-4.3) პირობა ყოველთვის სრულდება ფიზიკურად სტაბილური სისტემებისათვის.

ამრიგად, ფუნქციონალური ინტეგრალები კარგადაა განმარტებული მხოლოდ ევკლიდურ სივრცეში (სივრცეში წარმოსახვითი დროით). რეალურ სივრცეში ფიზიკური სიდიდეების გამოთვლისათვის უნდა მოვახდინოთ ანალიზური გაგრძელება.

თავი VIII. ველის კვანტური თეორია

VIII-1. ძირითადი თანაფარდობები

ველის თეორიას შევხედოთ როგორც კვანტურ-მექანიკურ სისტემას უსასრულო რაოდენობის თავისუფლების ხარისხებით. კვანტურ მექანიკაში შემოტანილ ობიექტებს შევუსაბამებთ შემდეგს:

$$\prod_{i=1}^{N}\left[dp_i dq_i\right] \quad \rightarrow \quad \left[d\varphi(x)d\pi(x)\right]$$

$$L(q_i,\dot{q}_i),\ H(q_i,p_i) \ \rightarrow \ \int d^3xL(\varphi,\partial_\mu\varphi), \quad \int d^3xH(\varphi,\pi)$$

სადაც შემოდის ველის კანონიკურად შეუღლებული იმპულსი, ლაგრანჟიანის და ჰამილტონიანის სიმკვრივეები. მაწარმოებელი ფუნქციონალი $W[J]$ არის ვაკუუმ-ვაკუუმური გადასვლის ამპლიტუდა გარეშე წყაროს თანდასწრებით. ამ გზით მივიღებთ კვანტურ-მექანიკური თანაფარდობების ბუნებრივ განზოგადებას

$$W[J]\sim\int\left[D\varphi D\pi\right]\exp\left\{i\int d^4x\left[\pi(x)\partial_0\varphi(x)-H(\pi,\varphi)+J(x)\varphi(x)\right]\right\}$$

ან

$$W[J]\sim\int D\varphi\exp\left\{i\int d^4x\left[L\left(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)\right)+J(x)\varphi(x)\right]\right\}$$

ამ ნაწილში ვიყენებთ ველის კვანტური თეორიისათვის მოსახერხებელ ბუნებრივ ერთეულებს, $\hbar=c=1$.

შემდეგ, რაკი უნდა განვიხილოთ ზღვარი $t\to i\infty$ გრინის ფუნქციების გამოთვლისათვის, ჯერ უნდა გამოვთვალოთ ევკლიდური სიდიდე $W_E[J]$,

$$W_E[J]\sim\int D\varphi\exp\left\{\int d^4\tilde{x}\left[L\left(\varphi(\tilde{x})+J(\tilde{x})\varphi(\tilde{x})\right)\right]\right\}, \qquad \tilde{x}_\mu\equiv\left(\tau=it,\vec{x}\right)$$

ბმული გრინის ფუნქციები გამოითვლება ასე:

$$G^{(n)}\left(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\right)=\frac{1}{W_E[J]}\left.\frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\tilde{x}_1)\ldots\delta J(\tilde{x}_n)}\right|_{J=0} \qquad \text{(VIII-1.1)}$$

ამრიგად, მიუკავშირებელი ნაწილების ასაცილებლად ეს მრავალჯერადი წარმოებულები უნდა გაიყოს $W_E[J]$-ზე. ამის მეტად მნიშვნელოვანი პრაქტიკული გამოსავალია ის, რომ $W[J]$-ს J-ზე დამოუკიდებელი მამრავლები არაარსებითია გრინის ფუნქციების გამოთვლებისათვის.

განვიხილოთ საილუსტრაციო მაგალითი – სკალარული თეორია $\lambda\varphi^4$:

$$L(\varphi)=L_0(\varphi)+L_I(\varphi),$$

$$L_0(\varphi)=\frac{1}{2}(\partial_\lambda\varphi)\partial^\lambda\varphi-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \qquad\qquad L_I(\varphi)=-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

ევკლიდური მაწარმოებელი ფუნქციონალია

$$W_E[J]=\int D\varphi\exp\left\{-\int d^4x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2+\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+J\varphi\right]\right\} \qquad \text{(VIII-1.2)}$$

რომელიც ასე გადავწეროთ:

$$W[J]=\exp\left[\int d^4xL_I\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]W_0[J], \qquad \text{(VIII-1.3)}$$

სადაც

$$W_0[J]=\int D\varphi\exp\left[\int dx(L_0+J\varphi)\right] \qquad \text{(VIII-1.4)}$$

არის თავისუფალი თეორიის მაწარმოებელი ფუნქციონალი; (აღნიშვნების გასა-მარტივებლად ჩამოშვებულია ევკლიდური სივრცის შესაბამისი აღნიშვნები) თავისუფალ ნაწილში გამოსახულება $-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2-(\nabla\varphi)^2$ შეგვიძლია შევცვალოთ გამოსახულებით $\varphi\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2\right)\varphi$, რადგან მათ შორის განსხვავება არის სრული დივერგენცია. ამიტომ გვაქვს:

$$W_0[J]=\int D\varphi\exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\varphi(x)K(x,y)\varphi(y)+\int d^4zJ(z)\varphi(z)\right] \qquad \text{(VIII-1.5)}$$

აქ

$$K(x,y)=\delta^{(4)}(x-y)\left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nabla^2+\mu^2\right) \qquad \text{(VIII-1.6)}$$

რადგან x,y ცვლადები შეიძლება განვიხილოთ როგორც "უწყვეტი ინდექსები", მიღებული გამოსახულება (VIII-1.5) ანალოგიურია უსასრულო განზომილების გაუსის შემდეგი სახის ინტეგრალისა

$$\int d\varphi_1...d\varphi_N\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_iK_{ij}\varphi_j+\sum_kJ_k\varphi_k\right]\sim \qquad \text{(VIII-1.7)}$$

$$\approx\frac{1}{\sqrt{\det K}}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j}J_i\left(K^{-1}\right)_{ij}J_j\right]$$

(VIII-1.5)-ის მარჯვენა ნაწილში გაუსის ინტეგრალები აიღება და არაარსებითი მამრავლის სიზუსტით მიიღება შემდეგი:

$$W_0[J]=\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta(x,y)J(y)\right] \qquad \text{(VIII-1.8)}$$

სადაც $\Delta(x,y)$ არის $K(x,y)$ ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი, რომელიც განიმარტება თანაფარდობით:

$$\int d^4yK(x,y)\Delta(y,z)=\delta^{(4)}(x-z).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\Delta(x,y)=\int\frac{d^4\kappa}{(2\pi)^4}\frac{e^{i\kappa(x-y)}}{\kappa^2+\mu^2}, \qquad \kappa=(ik_0,\vec{k}) \qquad \text{(VIII-1.9)}$$

თუ (VIII-1.3) ფორმულაში ექსპონენტას გავშლით შეშფოთების თეორიის მწკრივად L_I-ის ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ ვიკის განამწკრივს და ბმული ფუნქციების განმარტების მიხედვით ავაგებთ ფეინმანის წესებს. (VIII-1.9) ფუნქციის ანალიზურ გაგრძელებას, რაც დაიყვანება შეცვლაზე $\widetilde{x}_\mu\to x_\mu$ და $\kappa_\mu\to k_\mu$ ამ ფუნქციაში, მივყავართ კარგად ცნობილ ფეინმანის პროპაგატორზე სკალარული ველისათვის:

$$-\Delta(\widetilde{x}-\widetilde{y})\ \to\ i\Delta(x-y)=i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} \qquad \text{(VIII-1.10)}$$

ამ ფორმულის მნიშვნელში წარმოსახვითი დანამატი მიუთითებს იმ სასაზღვრო პირობების ხასიათზე, რომლებიც უნდა დაედოს პროპაგატორს. ის შეესაბამება ლაგრანჟიანში დამატებითი შესაკრების $i\varepsilon\varphi^2/2$ ჩართვას, რომელიც უზრუნველყოფს ფუნქციონალური ინტეგრალის კრებადობას მინკოვსკის სივრცეში.

VIII-2. ფერმიონული ველების დაკვანტვა ფუნქციონალური ინტეგრალით

ფერმიონების სისტემა შეიძლება აგრეთვე დაიკვანტოს ფუნქციონალური ინტეგრალით, თუკი გადასვლის ამპლიტუდას გამოვსახავთ უშუალოდ ყველა შესაძლო მსოფლიო წირებით, რომლებიც აერთებენ საწყის და საბოლოო მდგომარეობებს. მაწარმოებელ ფუნქციონალს ამ შემთხვევაში ექნება სახე

$$W[\eta,\overline{\eta}]=\int D\psi D\overline{\psi}xp\left\{i\int d^4x\left[L(\psi,\overline{\psi})+\overline{\psi}\eta+\overline{\eta}\psi\right]\right\}, \qquad \text{(VIII-2.1)}$$

სადაც $\psi,\overline{\psi},\eta,\overline{\eta}$ არიან (კლასიკური) ფერმიონული ველები და წყაროები, შესაბამისად. თუ ჯამი წირებზე ბოზე-სისტემებისთვის იყო ფუნქციონალური ინტეგრალი ჩვეულებრივი კლასიკური ფუნქციების მიხედვით, ფერმიონების შემთხვევაში (VIII-2.1) ინტეგრალი უნდა გამოითვალოს ანტიკომუტირებადი c-რიცხვოვანი ფუნქციების მიხედვით ("კლასიკური" ფერმიონული ველების მიხედვით)

$$\{\psi(x),\psi(x')\}=\{\psi(x),\overline{\psi}(x')\}=\{\overline{\psi}(x),\overline{\psi}(x')\}=0$$

$$\{\eta(x),\ \eta(x')\}=\{\eta(x),\overline{\eta}(x')\}=\{\overline{\eta}(x),\overline{\eta}(x')\}=\{\eta(x),\psi(x')\}=0$$

სხვა სიტყვებით, ეს ფუნქციები არიან გრასმანის ალგებრის ელემენტები.

გრასმანული ანალიზი

გრასმანულ ცვლადებს აქვთ მეტად უჩვეულო თვისებები. კლასიკური გრასმანის ცვლადები აღვნიშნოთ ასე

$$\xi_i \quad (i=1,2,...,n)$$

ისინი აკმაყოფილებენ ანტიკომუტაციის თვისებებს

$$\xi_i\xi_j+\xi_j\xi_i=0 \qquad (i,j=1,2,....,n) \qquad \text{(VIII-2.2)}$$

კერძოდ თითოეულისათვის ეს ნიშნავს

$$\xi_i^2=0 \qquad i \text{ ფიქსირებულია.} \qquad \text{(VIII-2.3)}$$

ამაზე იტყვიან, რომ გრასმანის რიცხვები არიან ნილპოტენტური. ამ თვისების პირველი შედეგია ის, რომ თუ გვაქვს ერთი გრასმანის ცვლადის ფუნქცია $f(\xi)$, მაშინ მას გააჩნია მარტივი ტეილორის გაშლა

$$f(\xi)=a+b\xi \qquad \text{(VIII-2.4)}$$

რაკი ξ_i ანტიკომუტირებადი სიდიდეებია, მათ მიხედვით წარმოებულები უნდა განიმარტოს გარკვეული სიფრთხილის დაცვით იმ აზრით, რომ მნიშვნელობა ექნება გაწარმოების მიმართულებას.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ გრასმანის რიცხვები არიან სიმბოლოები – დისკრეტული ობიექტები. მათ x-სგან განსხვავებით არ შეუძლიათ უწყვეტად ცვალონ თავისი მნიშვნელობა არც ერთი შინაარსით. ამიტომ ნათელია, რომ

წარმოებულებს არ ექნებათ ჩვეულებრივი ინტერპრეტაცია უსასრულოდ მცირეების ტერმინებში. მაგალითად, გაწარმოება განიმარტება ფორმალურად, როგორც

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}, \qquad \text{(კრონეკერის სიმბოლო)} \qquad \text{(VIII-2.5)}$$

ეს არის განმარტება ტოლობის მარცხენა მხარისა და არ განიხილება, როგორც ორი უსასრულოდ მცირე ნაზრდის შეფარდება. ამის მიუხედავად გრასმანის ცვლადებისათვის შეიძლება დიფერენციალური აღრიცხვის აგება, რომლის წესები ახლოსაა ჩვეულებრივი დიფერენციალური აღრიცხვის წესებთან.

ასე, მაგალითად, ნამრავლის წარმოებულის განმარტებაა:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \xi_p}\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_r}\right)=\\&=\delta_{pi_1}\left(\xi_{i_2}\xi_{i_3}\ldots\xi_{i_r}\right)-\delta_{pi_2}\left(\xi_{i_1}\xi_{i_3}\ldots\xi_{i_r}\right)+\ldots+(-1)^{r-1}\delta_{pi_r}\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_{r-1}}\right)\end{aligned} \qquad \text{(VIII-2.6)}$$

ე.ი. ჩვენ ჯერ გადავსვამთ ξ_p-ს, სანამ არ აღმოჩნდება ყველაზე მარცხნივ, ხოლო შემდეგ ვიყენებთ წარმოებულის განმარტებას.

მოყვანილი თანაფარდობები განმარტავენ გაწარმოებას მარცხნიდან, რომელიც უნდა განვასხვავოთ გაწარმოებისაგან მარჯვიდან:

$$\begin{aligned}&\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_r}\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_p}=\\&=\delta_{pi_r}\left(\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{r-1}}\right)-\delta_{pi_{r-1}}\left(\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{r-2}}\xi_{i_r}\right)+\ldots.+(-1)^{r-1}\delta_{pi_1}\left(\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_r}\right)\end{aligned}$$

ამ გზით თუ ვიმოქმედებთ, შეგვეძლება დავადგინოთ დიფერენციალური აღრიცხვის წესების შეთანხმებული სისტემა.

შევნიშნოთ, რომ თვით გრასმანის ცვლადების მსგავსად გაწარმოებაც ანტიკომუტირებადია

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}+\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial \xi_i}=0, \qquad (i, j=1,2,\ldots,n) \qquad \text{(VIII-2.7)}$$

ანუ იქცევა ისე, როგორც გარეშე წარმოებული დიფერენციალურ გეომეტრიაში. ცხადია, რომ ფიქსირებული ინდექსისათვის

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)^2=0,$$

ანუ წარმოებულიც ნილპოტენტურია. შეგვიძლია დავწეროთ ანტიკომუტაციის თანაფარდობა წარმოებულსა და გრასმანის რიცხვს შორის:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \xi_j\right\} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i}\xi_j+\xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_i}=\delta_{ij} \qquad \text{(VIII-2.8)}$$

ესაა მარცხენა წარმოებულისათვის.

გარკვეულობისათვის, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება აღნიშნული, ყველგან მარცხენა წარმოებულს განვიხილავთ.

ინტეგრაცია გრასმანის ცვლადით. დავიწყოთ კვლავ ერთი ცვლადით ξ. გვინდა განვსაზღვროთ ობიექტი

$$I(f)=\int d\xi f(\xi)$$

სადაც $I(f)$ არის c-რიცხვი. რადგან ξ არ არის უწყვეტი ცვლადი, ამიტომ $I(\xi)$ ინტეგრალიც არ არის $f(\xi)$ მრუდის ქვეშ მოთავსებული ფართობი. ამიტომ არავითარი შინაარსი არ აქვს ქვედა და ზედა საზღვრების მითითებას.

$I(f)$ უნდა გავიგოთ როგორც ფუნქციონალი, რომელიც ნებისმიერ $f(\xi)$ გრასმანის ალგებრის ელემენტს შეუსაბამებს c- რიცხვს, $I(f)$. მოითხოვენ შესაბამისობა იყოს ისეთი, რომ შესრულდეს ორი მთავარი თვისება, რომლითაც ხასიათდება ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალი უსასრულო საზღვრებში, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$; სახელდობრ, წრფივობა და ტრანსლაციური ინვარიანტობა.

სხვა სიტყვებით, ვთხოულობთ შემდეგ თვისებებს:

(1) $\int d\xi f(\xi) = \int d\xi f(\xi+\theta)$, სადაც θ გრასმანის რიცხვია.

(2) $\int d\xi [af(\xi)+bg(\xi)] = a\int d\xi f(\xi) + b\int d\xi g(\xi)$,

სადაც a,b - ნებისმიერი c-რიცხვებია.

ვიცით, რომ გრასმანის ცვლადის ფუნქციას აქვს მარტივი სახე

$$f(\xi) = f^{(0)} + f^{(1)}\xi$$

და რადგან ინტეგრალი c-რიცხვი უნდა იყოს, **<u>განვმარტოთ ასე:</u>**

$$I(f) \equiv \int d\xi \left[f^{(0)} + f^{(1)}\xi\right] \equiv f^{(1)} \qquad \text{(VIII-2.9)}$$

ეს განმარტება აკმაყოფილებს ზემოხსენებულ 2 მოთხოვნას. ამავე დროს 2 დამოუკიდებელი ფუნქციისათვის, 1 და ξ, ეს განმარტება დაიყვანება შემდეგ თვისებებზე:

$$\int d\xi \cdot 1 \equiv 0, \qquad \int d\xi \cdot \xi \equiv 1 \qquad \text{(VIII-2.10)}$$

ზემოხსენებული მოთხოვნები, ცხადია, კმაყოფილდება. შევნიშნოთ, რომ ასეთი განმარტების შემთხვევაში გრასმანული ინტეგრაცია ემთხვევა გაწარმოებას:

$$\int d\xi f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \qquad \text{(VIII-2.11)}$$

ეს თვისება კი ემყარება შემდეგს: D-ით აღვნიშნოთ გაწარმოება გრასმანის ცვლადით, ხოლო I იყოს ინტეგრაცია. გვაქვს შემდეგი თვისებები:

$ID = 0$ (სრული წარმოებულიდან ინტეგრალი უნდა იყოს ნული)

$DI = 0$ (c-რიცხვის წარმოებული უდრის ნულს)

რაკი გრასმანის ცვლადით გაწარმოება ნილპოტენტურია, ამ პირობების დასაკმაყოფილებლად , ბუნებრივია, გავაიგივოთ

$$I = D$$

გრასმანული ანალიზი ასე განვავრცოთ: განვიხილოთ n ობიექტი, რომლებიც ემორჩილებიან ანტიკომუტაციას:

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

განმარტებით ავიღოთ $(\xi_i)^0 = 1$

ამრიგად წარმოიქმნება 2^n წრფივად დამოუკიდებელი სტრუქტურები:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3, \dots, \xi_{n-1}\xi_n \\ \xi_1\xi_2\xi_3, \dots, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi_1\xi_2\dots\xi_n \end{array}\right] , \quad \text{სულ } 2^n \qquad \text{(VIII-2.12)}$$

ეს სტრუქტურები წარმოქმნიან 2^n-განზომილებიან წრფივ სივრცეს, G_n.

გრასმანის ξ_i რიცხვებს უწოდებენ ამ ალგებრის წარმომქმნელებს, რადგან ამ ალგებრის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=$$
$$= f^{(0)}+\sum_i f_i^{(1)}\xi_i+\sum_{i_1,i_2} f_{i_1 i_2}\xi_{i_1}\xi_{i_2}+...+\sum_{i_1,i_2,...i_n} f_{i_1 i_2 ..i_n}^{(n)}\xi_{i_1}\xi_{i_2}...\xi_{i_n} \qquad \text{(VIII-2.13)}$$

სადაც f-ები არიან ჩვეულებრივი (კომუტირებადი) c-რიცხვები. ნებისმიერი ორი რიცხვის გადასმის მიმართ ξ-ების ნამრავლების ანტისიმეტრიულობის გამო, მოყვანილი გაშლა არ არის ერთადერთი, f-ებს ყოველთვის შეგვიძლია დავუმატოთ ორი ინდექსის გადასმის მიმართ სიმეტრიული წევრი.

ხშირად მოსახერხებელია განვიხილოთ "წმინდად ლუწი" და "წმინდად კენტი" ქვესიმრავლეები ამ ალგებრისა, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ლუწი (კენტი) რაოდენობის ξ-ების ნამრავლებს

$$f^{even}=f^{(0)}+f_{i_1 i_2}^{(2)}\xi_{i_1}\xi_{i_2}+f_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)}\xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3}\xi_{i_4}+... \qquad \text{(VIII-2.14)}$$

$$f^{odd}=f_{i_1}^{(1)}\xi_{i_1}+f_{i_1 i_2 i_3}^{(3)}\xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3}+.... \qquad \text{(VIII-2.15)}$$

ნათელია, რომ ლუწი ქვესიმრავლე კომუტირებს G_n ალგებრის ყველა ელემენტთან, მაშინ, როცა კენტი ქვესიმრავლის წევრები ანტიკომუტირებენ ერთმანეთთან.

ეს მინიატურულად იმ ფაქტის გამოხატულებაა, რომ ფერმიონთა ლუწი რაოდენობა წარმოქმნის ბოზონს, მაშინ როცა ფერმიონთა კენტი რაოდენობა– ფერმიონს.

მაგალითი: G_2, რომელიც წარმოიქმნება 2 ელემენტით: ξ_1 და ξ_2. განვსაზღვროთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\int d\xi_1 d\xi_2 f(\xi_1,\xi_2)$$

ბუნებრივია, უნდა მოვითხოვოთ აგრეთვე, რომ დიფერენციალებიც ანტიკომუტირებენ:

$$\{d\xi_1,d\xi_2\}=\{d\xi_1,\xi_2\}=0 \qquad \text{(VIII-2.16)}$$

G_2 ალგებრა შეიცავს 4 დამოუკიდებელ ფუნქციას;

$$1,\quad \xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_1\xi_2 \qquad \text{(VIII-2.17)}$$

ამის მიხედვით განვმარტოთ ინტეგრალები:

- $\int d\xi_1\int d\xi_2\cdot 1=\int d\xi_1\left[\int d\xi_2\cdot 1\right]=0$
- $\int d\xi_1\int d\xi_2\cdot \xi_1=-\int d\xi_2\left[\int d\xi_1\xi_1\right]=-\int d\xi_2\cdot 1=0$
- $\int d\xi_1\int d\xi_2\cdot \xi_2=\int d\xi_1\cdot 1=0$
- $\int d\xi_1\int d\xi_2(\xi_1\xi_2)=-\int d\xi_1\left[\int d\xi_2\cdot\xi_2\right]\xi_1=-\int d\xi_1\cdot\xi_1=-1$

ეს წესები მთლიანად განსაზღვრავენ ნებისმიერი $f(\xi_1,\xi_2)$ ფუნქციიდან ინტეგრალს და ადვილია განზოგადება ნებისმიერ G_n-ზე.

რაკი ნებისმიერი f-ფუნქცია შეიძლება ჩაიწეროს ზემოთჩამოთვლილი სტრუქტურების მიხედვით გაშლის სახით, ნათელია, რომ ინტეგრალში:

$$\int d\xi_1\int d\xi_2 ...\int d\xi_n f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$$

არანულოვან წვლილს შეიტანს მხოლოდ უკანასკნელი წევრი. ყველა წინა წევრი შეიცავს ერთ ისეთ ინტეგრაციას მაინც, რომელსაც არ აღმოაჩნდება შესაბამისი ξ_i და რაკი $\int d\xi_i\cdot 1=0,$ ამიტომ ყველა ასეთი წევრიდან ინტეგრალი ნულის ტოლი გამოვა. უკანასკნელი წევრი ინტეგრირდება $\xi_{i_1}\xi_{i_2}...\xi_{i_n}$ ნამრავლის მიყვანით

შემდეგ სახეზე $\xi_n\xi_{n-1}...\xi_1$, სათანადოდ ნიშნების გათვალისწინებით თითოეული გადასმის დროს.

ამიტომაც,

$$\int d\xi_1...\int d\xi_n\left(\xi_{i_1}\xi_{i_2}...\xi_{i_n}\right)=(-1)^P \,, \qquad \text{(VIII-2.18)}$$

სადაც $(-1)^P$ არის შემდეგი გადასმის ნიშანი: $\begin{pmatrix} i_1, & i_2,...,i_n \\ n, n-1,...,1 \end{pmatrix}$

ცვლადის წრფივი შეცვლა გრასმანულ ინტეგრალში.

ვთქვათ გვაქვს G_n-ის $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ ელემენტებით წარმოქმნილი სივრცე და გადავდივართ ცვლადებზე $(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$. გადასვლა განმარტებული იყოს ასე:

$$\eta_i=\sum_j B_{ij}\xi_j \equiv B_{ij}\xi_j \qquad \text{(VIII-2.19)}$$

სადაც კოეფიციენტები ჩვეულებრივი რიცხვებია, რომლებიც ქმნიან არასინგულა-რულ მატრიცას. ნათელია, რომ კრებული $\{\eta_i\}$ იმავე საფუძველზე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც G_n ალგებრის წარმომქმნელთა კრებული, ე.ი. ყველა η_i ანტიკომუტირებს

$$\{\eta_i,\eta_j\}=0$$

ნებისმიერი ფუნქცია, რომელსაც ადრე ვწერდით პოლინომიალის სახით, ზუსტად ასევე შეგვიძლია ჩავწეროთ ახალი ცვლადების პოლინომიალად. უკვე ვიცით, რომ G_n-ში ერთადერთი n-ჯერადი ინტეგრალია:

$$\int d\xi_1...\int d\xi_n\left(\xi_n\xi_{n-1}...\xi_1\right)=1 \qquad \text{(VIII-2.20)}$$

რადგან იმავე უფლებით ალგებრა შეგვეძლო შემოგვეტანა $(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$ ბაზისის გამოყენებით, გვაქვს აგრეთვე

$$\int d\eta_1...\int d\eta_n\left(\eta_n\eta_{n-1}...\eta_1\right)=1 \qquad \text{(VIII-2.21)}$$

გამოვიყენოთ ახლა (VIII-2.19) გარდაქმნა. მაშინ ცხადია, რომ

$$\eta_n\eta_{n-1}...\eta_1=(\det B)\xi_n\xi_{n-1}...\xi_1 \qquad \text{(VIII-2.22)}$$

ამიტომ ინტეგრაციის პასუხების ერთმანეთთან შეთავსებას შევძლებთ მარტო მაშინ, თუ

$$d\eta_1 d\eta_2...d\eta_n=(\det B)^{-1}d\xi_1 d\xi_2...d\xi_n \qquad \text{(VIII-2.23)}$$

გავიხსენოთ, რომ ჩვეულებრივი რიცხვების შემთხვევაში გარდაქმნის დეტერმინანტი აღმოჩნდებოდა მრიცხველში. გარდაქმნის ამ დეტერმინანტს ანუ იაკობიანს ჩვეულებრივი რიცხვების შემთხვევაში, გრასმანის ცვლადების შემთხვევაში ხშირად უწოდებენ ***ბერეზინიანს***, საბჭოთა მათემატიკოსის ფ.ა. **ბერეზინის** საპატივცემულოდ, რომელმაც მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა გრასმანული ანალიზის განვითარებაში

განვიხილოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ინტეგრალი:

1. *ინტეგრალი ექსპონენტიდან*

$$\int d\xi_1\int d\xi_2 \exp[-\lambda\xi_1\xi_2]=\int d\xi_1\int d\xi_2(1-\lambda\xi_1\xi_2)=\lambda \qquad \text{(VIII-2.24)}$$

2. ამისი განზოგადება ინტეგრალზე ბიწრფივი ფორმიდან ექსპონენტაში საკმაოდ მარტივად წყდება. მართლაც, განვიხილოთ $2n$ ერთობლიობა მსახველებისა:

$$\left(\xi_1,...,\xi_n;\bar{\xi}_1,...,\bar{\xi}_n\right)$$

აქ თავზე ხაზით უბრალოდ ცვლადებია აღნიშნული და არაფერი საერთო არ აქვს შეუღლების ოპერაციასთან. ეს ცვლადები სრულიად დამოუკიდებელნი არიან ერთმანეთისაგან.

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I=\int d\bar{\xi}_1 d\xi_1 d\bar{\xi}_2 d\xi_2 ... d\bar{\xi}_n d\xi_n \exp\left[-\sum_{i,j}\bar{\xi}_i A_{ij}\xi_j\right], \qquad \text{(VIII-2.25)}$$

სადაც A_{ij} არის რაიმე $n\times n$ არასინგულარული რიცხვითი მატრიცა, რომლის დიაგონალიზაცია შეიძლებოდეს, ვთქვათ, გარდაქმნით

$$B_{ki}A_{ij}\left(B^{-1}\right)_{jl}=\lambda_k\delta_{kl} \qquad \text{(VIII-2.26)}$$

აქ λ_k-ები არიან A მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები.

განვსაზღვროთ გრასმანის ახალი ცვლადები $\left(\eta_1,\eta_2,...,\eta_{n;}\bar{\eta}_1,\bar{\eta}_2,...,\bar{\eta}_n\right)$. შემოვიტანოთ შემდეგნაირი წრფივი შეცვლა

$$\eta_i\equiv B_{ij}\xi_j \qquad \text{(VIII-2.27)}$$

და მისგან დამოუკიდებლად

$$\bar{\eta}_k=\left(\left(B^T\right)^{-1}\right)_{ki}\bar{\xi}_i=\bar{\xi}_i\left(B^{-1}\right)_{ik} \qquad \text{(VIII-2.28)}$$

ახლა ჩავატაროთ ზემოთმოყვანილი შეცვლა, რისთვისაც გამოვიყენოთ

$$d\bar{\eta}_1 d\eta_1....d\bar{\eta}_n d\eta_n=\frac{1}{\det B\cdot\det\left[\left(B^T\right)^{-1}\right]}d\bar{\xi}_1 d\xi_1...d\bar{\xi}_n d\xi_n= \qquad \text{(VII-2.29)}$$
$$=d\bar{\xi}_1 d\xi_1...d\bar{\xi}_n d\xi_n$$

ამავე დროს, თუ გამოვიყენებთ (VIII-2.26)-ს, რომელიც ასე ჩავწეროთ $B\cdot A\cdot B^{-1}=\lambda,$ მიიღება

$$\bar{\xi}_i A_{ij}\xi_j=\bar{\eta}_k B_{ki}A_{ij}B^{-1}_{jl}\eta_l=\sum_k\lambda_k\bar{\eta}_k\eta_k$$

ამრიგად:

$$I=\int d\bar{\eta}_1 d\eta_1...d\bar{\eta}_n d\eta_n \exp\left[-\sum_k\lambda_k\bar{\eta}_k\eta_k\right]= \qquad \text{(VIII-2.30)}$$
$$=\prod_k\left(\int d\bar{\eta}_k d\eta_k\right)=\prod_k\lambda_k=\det A$$

თუ ამას შევადარებთ c-რიცხვოვან გაუსის ინტეგრალს n ცვლადისგან, მივიღებდით $\left(\det A\right)^{-1/2}$; $2n$ ცვლადის შემთხვევაში კი – $\left(\det A\right)^{-1}$. ვხედავთ, რომ გრასმანული ბუნების გამო ინტეგრალში დეტერმინანტი ჩნდება მრიცხველში.

ამის შემდეგ ნათელია, რომ ფერმიონული ველების დაკვანტვისათვის ფუნქციონალური ინტეგრალით კლასიკური ფერმიონული ველები $\psi(x)$ და $\bar{\psi}(x)$ უნდა ჩავთვალოთ გრასმანის უსასრულო განზომილებიანი ალგებრის ელემენტებად. ზემოთ მიღებული შედეგები ადვილად გადაიტანება ამ შემთხვევაზე. “კლასიკური ზღვარი” შეიძლება განიმარტოს, როგორც $\hbar\to 0$, როცა ყველა ანტიკომუტატორი ნულად გადაიქცევა. ამ ზღვარში ფერმიონული ველები აღარ არიან არატრივიალური კვანტური ოპერატორები, არც ჩვეულებრივი c-რიცხვო-

ვანი ველები, რადგან ერთმანეთთან ანტიკომუტირებენ კომუტაციის ნაცვლად. ისინი შეიძლება იყვნენ გრასმანის რიცხვები.

ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ G_n ალგებრის წარმომქმნელი გრასმანის რიცხვები უპირველეს ყოვლისა არიან რაიმე დისკრეტული ობიექტები, და არა ცვლადები, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობებს რაღაც დიაპაზონში. მაგრამ ამ შეზღუდვას არ აქვს ადგილი G_n ალგებრის ნებისმიერი ელემენტისათვის. ნებისმიერ f ელემენტს აქვს c-რიცხვოვანი კოეფიციენტები: $f^{(0)}, f^{(1)},..., f^{(n)}$. ამ რიცხვებს შეუძლიათ იცვლებოდნენ უწყვეტად, შეიძლება დამოკიდებული იყვნენ სხვა რიცხვით ცვლადებზე, მათ შორის სივრცულ და დროით კოორდინატებზე. ამ შემთხვევაში G_n-ის ელემენტები აგრეთვე შეიძლება იცვლებოდნენ დრო-სივრცეში.

კერძოდ, შეგვიძლია განვიხილოთ წრფივი ფუნქცია

$$f(\vec{x},t)=\sum_i f_i^{(1)}(\vec{x},t)\xi_i$$

ესაა ანტიკომუტირებადი ველი

$$\{f(\vec{x},t), f(\vec{x}',t')\}=0$$

შევნიშნოთ, რომ შეიძლება მისი დიფერენცირება ან ინტეგრაცია ჩვეულებრივი შინაარსით.

რომ მივიღოთ ჩვენი დირაკის “კლასიკური” ველი, უნდა განვიხილოთ გრასმანის ალგებრა გენერატორთა უსასრულო რაოდენობით, რომლებსაც ჩავწერთ წყვილურ აღნიშვნებში, $(\xi_1,\bar{\xi}_1,...,\xi_n,\bar{\xi}_n;\, n\to\infty)$ ურთიერთდამოუკიდებე-ლი გრასმანული გენერატორებით. განვიხილოთ აგრეთვე რაიმე ორთონორმირე-ბული c- რიცხვოვანი ფუნქციების სრული კრებული $\phi_i(\vec{x},t)$,

$$\int d\vec{x}\int dt\phi_i^*(\vec{x},t)\phi_j(\vec{x},t)=\delta_{ij}$$

განვსაზღვროთ

$$\psi(x)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(x)\xi_i, \qquad \psi^+(x)\equiv\sum_{i=}^{\infty}\phi_i^*(x)\bar{\xi}_i$$

არსებითად ეს არის დირაკის კლასიკური ველები. მათი მეშვეობით ავაგებთ ლაგრანჟიანს. ლაგრანჟიანში ფერმიონული ველები, როგორც წესი, კვადრატულად შედიან: $L=(\bar{\psi},A\psi)$. ამიტომ (VIII-2.1) შეიძლება ჩავთვალოთ გაუსიანის განზოგადებად. მაშინ ზემოთ მიღებული შედეგების თანახმად, მივიღებთ

$$W=\int D\psi D\bar{\psi}\exp\left[\int d^4x\bar{\psi}A\psi\right]=\det A \qquad \text{(VIII-2.31)}$$

აქ არ ჩავრთეთ წევრები წყაროებით. ეს სიდიდე არის ვაკუუმ-ვაკუუმური გადასვლის ამპლიტუდა და, ბმული დიაგრამები, რომლებსაც წარმოქმნის $\ln W$, ადგენენ გრაფიკების ერთობლიობას ერთი ჩაკეტილი ფერმიონული მარყუჟით(იხ. ქვემოთ არააბელური ყალიბრული ველების დაკვანტვისას)

როცა ჩვეულებრივი ფუნქციონალური ინტეგრალიდან გადავდივართ ფერმიონულ ფუნქციონალურ ინტეგრალზე ანტიკომუტირებადი ცვლადებით, მნიშვნელის ნაცვლად მრიცხველში ჩნდება დეტერმინანტი, რაც იწვევს $\ln W$-ს საერთო ნიშნის შეცვლას. აქედან გამომდინარეობს ფეინმანის კარგად ცნობილი წესი, რომ ყოველ ჩაკეტილ ფერმიონულ მარყუჟს უნდა მივაკუთვნოთ მინუს ნიშანი.

ვხედავთ, რომ თეორიის რეგულარული დაკვანტვისათვის ფეინმანის ფუქციონალური ინტეგრალი ასრულებს განმსაზღვრელ როლს, სახელდობრ, თეორიაში ჩატარებულია დაკვანტვა, თუ გადასვლის ამპლიტუდა ან ვაკუუმური

ფუნქციონალი ჩაწერილია ფუნქციონალური ინტეგრალის სახით. ამ მეთოდმა განსაკუთრებით წინ წასწია თეორია ე.წ. ყალიბრული ველების შემთხვევაში, რომლის განხილვაზეც ახლა გადავალთ.

თავი IX. ყალიბრული ველების დაკვანტვა

ყალიბრული თეორიების (იანგ-მილსის ტიპის ველების) მთავარი თვისება – ყალიბრული ინვარიანტულობა – დაკვანტვისას ამჟღავნებს საკმაო სირთულეებს იმის გამო, რომ არსებობენ ზედმეტი თავისუფლების ხარისხები, რომელთა შესაბამისი არაფიზიკური ცვლადებისაგან დამოუკიდებელი უნდა იყვნენ დაკვირვებადი ფიზიკური სიდიდეები.

IX-1. კვანტური ელექტროდინამიკა (*QED*)

კვანტურ ელექტროდინამიკაში ყალიბრული კოვარიანტული ლაგრანჟიანით

$$L^{\gamma} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{(IX-1.1)}$$

იმპულსური სივრცის გრინის ფუნქციისათვის მიიღება განტოლება

$$\left(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu\right) \tilde{D}_\sigma^\nu(k) = -i g_{\mu\sigma} \qquad \text{(IX-1.2)}$$

ამ ოპერატორს არ გააჩნია შებრუნებული. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ

$$K_{\mu\nu} \equiv k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu\,, \qquad \text{(IX-1.3)}$$

ადვილად დავადგენთ, რომ

$$K_{\mu\nu} K_\lambda^\nu \sim K_{\mu\lambda} \qquad \text{(IX-1.4)}$$

ეს ნიშნავს, რომ საქმე გვაქვს პროექტირების ოპერატორთან (ის აპროექტირებს ყალიბრული ველის განივ თავისუფლების ხარისხებზე) და ამიტომ არ გააჩნია შებრუნებული.

ამ პრობლემიდან თავის დასაღწევად გამოიყენება მარტივი მეთოდი, რომელიც მდგომარეობს გარკვეული ყალიბრების არჩევაში (ანუ ყალიბრების დაფიქსირებაში). ასე, მაგალითად, ლორენცის ყალიბრებაში, $\partial_\mu A^\mu = 0$, გვაქვს

$$k^\sigma \tilde{D}_\sigma^\nu(k) = 0 \qquad \text{(IX-1.5)}$$

ამიტომ (IX-1.2) განტოლებიდან გვრჩება

$$k^2 \tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -i g_{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \qquad \text{(IX-1.6)}$$

მაგრამ ასეთი მიდგომა არღვევს ყალიბრულ ინვარიანტულობას, რასაც შეუძლია შექმნას სერიოზული სიძნელეები განშლადობათა ანალიზის დროს. ზოგად შემთხვევაში (IX-1.2) განტოლების ამონახსნი არაცალსახაა, რაკი მარცხენა მხარეში მდგომ ოპერატორს არ აქვს შებრუნებული.

რომ მოვინდომოთ ამ განტოლების ანალიზი, გამოვყოთ მასში განივი და გასწვრივი ნაწილები ანუ (IX-1.2) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ ასე:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tilde{D}^{tr} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tilde{D}^L \qquad \text{(IX-1.7)}$$

მაშინ (IX-1.2) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$k^2 \left(g^{\mu\sigma} - \frac{k^\mu k^\sigma}{k^2}\right) \tilde{D}^{tr} = -i g^{\mu\sigma} \qquad \text{(IX-1.8)}$$

აქედანაც ვერ ვიპოვით $\tilde{D}^L$-ს, ის რჩება განუსაზღვრელი. ამიტომ მივდივართ იმის აუცილებლობამდე, რომ $\tilde{D}_{\mu\nu}$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის უნდა დავარღვიოთ ყალიბრული ინვარიანტულობა, ე.ი. უნდა ავირჩიოთ რომელიმე

ყალიბრული პირობა. კერძო შემთხვევაში, ის შეიძლება იყოს, მაგალითად, ლორენცის ყალიბრება (თუმცა ეს არ არის აუცილებელი):

$$k^{\nu} D_{\nu}^{\sigma} = 0 \qquad \text{(IX-1.9)}$$

ზოგად შემთხვევაში ყალიბრების დაფიქსირება მიიღწევა ლაგრანჟიანში დამატებითი წევრის შეტანით, რომელიც არღვევს ყალიბრულ ინვარიანტულობას:

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_{\mu} A^{\mu}\right)^2 \qquad \text{(IX-1.10)}$$

ξ-ს არჩევა შეიძლება ნებისმიერად. მას უწოდებენ ყალიბრების პარამეტრს. ამის შედეგად მიღებული სრული ლაგრანჟიანიდან

$$L^{\gamma} + L_{gf} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_{\mu} A^{\mu}\right)^2 \qquad \text{(IX-1.11)}$$

ველისთვის გამომდინარეობს შემდეგი განტოლებები:

$$\partial^2 A_{\mu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_{\mu}\left(\partial_{\nu} A^{\nu}\right) = 0 \qquad \text{(IX-1.12)}$$

აქედან იმპულსურ სივრცეში პროპაგატორისათვის მიიღება განტოლება:

$$\left(g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}\right)\tilde{D}_{\sigma}^{\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} \qquad \text{(IX-1.13)}$$

თუ ახლა აქ (IX-1.7) განტოლებას გამოვიყენებთ, განვსაზღვრავთ

$$\tilde{D}^{tr} = -\frac{i}{k^2} \qquad \text{და} \qquad \tilde{D}^{L} = -\frac{i\xi}{k^2} \qquad \text{(I-1.14)}$$

ბუნებრივია, რომ ξ-ის სხვადასხვა არჩევით სხვადასხვა ყალიბრება მიიღება. ყალიბრული წევრის L_{gf} გაქრობა ხდება ზღვარში $\xi \to \infty$. ამ დროს $\tilde{D}^{L} \to \infty$. ამიტომაც გამოთვლების დროს სასურველია ξ შევინარჩუნოთ ბოლომდე და მერე ავიღოთ ზღვარი. რადგან ყველა ფიზიკური (დაკვირვებადი) სიდიდე არის ყალიბრულად ინვარიანტული და ამიტომ არ არის დამოკიდებული ყალიბრების პარამეტრზე, არ ჩნდება ზღვარზე გადასვლის აუცილებლობა. ლიტერატურაში ყველაზე ხშირად გვხვდება შემდეგი არჩევანი:

$$\xi = 1, \qquad \tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} \qquad \text{(ფეინმანის ან ფიზიკური ყალიბრება)}$$

(IX-1.15)

$$\xi = 0, \qquad \tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}\right), \quad \text{(ლანდაუს ანუ განივი ყალიბრება)}$$

(IX-1.16)

ისმის კითხვა: რას იწვევს L_{gf} წევრის გათვალისწინება ამპლიტუდებში?

განვიხილოთ ინფინიტეზიმალური ყალიბრული გარდაქმნა:

$$A^{\mu} \to A^{\mu} - \frac{1}{e}\partial^{\mu}\left(\delta\theta(x)\right), \qquad \partial_{\mu} A^{\mu} \to \partial_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{e}\partial^2\left(\delta\theta(x)\right) \qquad \text{(IX-1.17)}$$

რაკი L^{γ} ინვარიანტულია, ეს წევრი წვლილს არ შეიტანს ქმედების ცვლილებაში.
ამიტომ

$$\delta S = -\delta\int \frac{1}{2\xi}\left(\partial_{\mu} A^{\mu}\right)^2 d^4x = -\frac{1}{2\xi}\int\left(\partial_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{e}\partial^2 \delta\theta(x)\right)\left(\partial_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{e}\partial^2 \delta\theta(x)\right)d^4x +$$

$$+\frac{1}{2\xi}\int\left(\partial_{\mu} A^{\mu}\right)^2 d^4x = \frac{1}{e\xi}\int d^4x\left(\partial_{\mu} A^{\mu}\right)\partial^2 \delta\theta(x)$$

თუ აქ ნაწილობით ინტეგრაციას ჩავატარებთ, მივიღებთ

$$\delta S=\frac{1}{e\xi}\int d^4x\,\delta\theta(x)\partial^2\left(\partial_\mu A^\mu\right)$$

ანუ თუ მოვითხოვთ (ინვარიანტულობას) $\frac{\delta S}{\delta\theta}=0$, მიიღება

$$\partial^2\left(\partial_\mu A^\mu\right)=0 \qquad \text{(IX-1.18)}$$

ესაა განტოლება შემდეგი ველისათვის (ან "ნაწილაკისათვის") $\eta\equiv\partial_\mu A^\mu$, რომელიც თავისუფალია ანუ არ ურთიერთქმედებს არც ერთ ველთან. თუ განვიხილავთ მისთვის კოშის ამოცანას

$$\eta(x)\big|_{t=0}=0 \qquad \text{და} \qquad \dot{\eta}(x)\big|_{t=0}=0$$

მივიღებთ ტრივიალურ ამონახსნს $\eta=0$ ყველა t-სთვის.

ამრიგად, "η- ნაწილაკები" შეგვიძლია არ განვიხილოთ (რადგან არ ურთიერთქმედებენ არავისთან), ხოლო ყალიბრების დამაფიქსირებელი წევრი ყოფილა ლაგრანჟიანში არაარსებითი დანამატი.

კვანტურ ელექტროდინამიკაში ასე იქცევიან. დალამბერის განტოლების $\partial^2\eta=0$ ამონახსნს წარმოადგენენ დადებით და უარყოფით სიხშირულ ნაწილთა ჯამად:

$$\eta(x)=\eta^{(+)}(x)+\eta^{(-)}(x)$$

და დაკვანტვისას ფიზიკურ მდგომარეობებს ადებენ დამატებით პირობას (გუპტა-ბლეილერის პირობა):

$$\eta^{(+)}(x)\left|\Phi_{phys}\right\rangle=0 \qquad \text{(IX-1.19)}$$

ანუ ფიზიკურ მდგომარეობებში არ უნდა გვქონდეს "η-ნაწილაკები".

IX-2. არააბელური (იანგ-მილსის) ველების შემთხვევა

ვნახოთ ახლა როგორია მდგომარეობა არააბელური ყალიბრული (იანგ-მილსის) ველების შემთხვევაში. ამ დროს ყალიბრების დამაფიქსირებელ წევრს ექნება სახე:

$$L_{gf}=-\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A_a^\mu\right)^2 \qquad \text{(IX–2.1)}$$

ხოლო ინფინიტეზიმალურ გარდაქმნებს -

$$\delta A_\mu=i\theta_a\left[T^a,A_\mu\right]+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a T_a \qquad \text{(IX-2.2)}$$

სადაც

$$A_\mu=A_\mu^b T_b \qquad \text{(IX-2.3)}$$

ამიტომ მიიღება

$$\delta A_\mu^a=i\theta_a A_\mu^b\left[T^a,T^b\right]+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a T_a$$

და რადგან

$$\left[T^a,T^b\right]=if_{abc}T^c \qquad \text{(IX-2.4)}$$

მივიღებთ

$$\delta A_\mu^a=f^{abc}A_\mu^b\theta_c+\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a \qquad \text{(IX-2.5)}$$

ანუ

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g} D_\mu \theta^a \tag{IX-2.6}$$

განვიხილოთ ახლა ქმედების ვარიაცია იმის გათვალისწინებით, რომ მასში არანულოვანი წვლილი მხოლოდ L_{gf} -დან შეიძლება მოვიდეს:

$$\delta S = -\frac{1}{\xi}\int d^4x\left(\partial_\mu A^\mu_a\right)\left(\partial_\nu \delta A^\nu_a\right) = -\frac{1}{\xi}\int d^4x\left(\partial_\mu A^\mu_a\right)\left(\frac{1}{g}\partial_\nu D^\nu \delta\theta_a\right)$$

ნაწილობითი ინტეგრაციით და კოვარიანტული წარმოებულის განმარტების გათვალისწინებით ეს გამოსახულება მიიყვანება სახეზე:

$$\delta S = -\frac{1}{g\xi}\int d^4x\left[\delta\theta_a \partial^2\left(\partial_\mu A^\mu_a\right) - g\left(\partial_\nu \partial_\mu A^\mu_c\right)\left(f^{cba} A^b_\nu \delta\theta^a\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{g\xi}\int d^4x \delta\theta_a \left(D^\nu \partial_\nu \eta_a\right)$$

სადაც $\eta_a \equiv \partial_\mu A^\mu_a$. ავიღოთ $\dfrac{\delta S}{\delta\theta_a} = 0$. გვექნება

$$D^\nu \partial_\nu \eta_a = 0 \tag{IX-2.7}$$

ესაა განტოლება η_a ველისათვის. ცხადი სახით

$$\partial^2 \eta_a + g f_{abc} A^\nu_b \partial_\nu \eta_c = 0 \tag{IX-2.8}$$

ვხედავთ, რომ QED-სგან განსხვავებით აქ შემოდის არაწრფივი წევრი, რომელიც შეიცავს იანგ-მილსის ველს, A^ν_b. ამიტომ $\eta_a, \dot{\eta}_a$ სიდიდეებისთვის ნულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაშიც კი η_a ველი კვლავ გენერირდება A- ველების მიერ. კვანტურ ენაზე ეს ნიშნავს, რომ A^ν_b ველი აღაგზნებს η_a ველის კვანტურ ფლუქტუაციებს და წარმოშობს η_a ნაწილაკებს, რომლებიც შეიძლება გვქონდეს როგორც რეალურ (ასიმპტოტურ) მდგომარეობებში, ასევე შუალედურ (ვირტუალურ) მდგომარეობებში (ე.ი. მარყუჟებში).

QED-ში ფიზიკური მდგომარეობების არჩევით (IX-1.19) გავაძევეთ η_a ველები. რაც შეეხება იანგ-მილსის თეორიას, აქ განტოლება ასეთია

$$\partial^2 \eta_a = -g f_{abc} A^\nu_b \partial_\nu \eta_c$$

იგი შეიცავს წყაროს, რომელსაც შეუძლია გააჩინოს η-ნაწილაკები. ამ განტოლების ამონახსნი აღარ დაიშლება $(\pm)$ სიხშირულ ნაწილებად და ამდენად შეუძლებელია მთლიანად გამოირიცხოს η-ნაწილაკების გამოჩენა. საწყის და საბოლოო ასიმპტოტურ მდგომარეობებში ჯერ კიდევ შეგვიძლია ავიღოთ $\partial_\mu A^\mu_a = 0$,რაც გასწვრივი პოლარიზაციების გამორიცხვას ნიშნავს და ამიტომ ასიმპტოტურ მდგომარეობებში η-ნაწილაკები არ გვექნება. მაგრამ ფლუქტუაციების გამო ასეთი ნაწილაკები შეიძლება გაჩნდნენ როგორც ფლუქტუაციები, ანუ მარყუჟებში ისინი შეიძლება მონაწილეობდნენ. **ამის გამო დაირღვევოდა ფიზიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური პრინციპი – უნიტარობა.**

ამ არაფიზიკური მდგომარეობების ჩასახშობად გამოიყენება ფადეევისა და პოპოვის მეთოდი. მისი საბოლოო შედეგი იმაზე დაიყვანება, რომ ლაგრანჟიანში არსებულ ველებთან ერთად უნდა შემოვიყვანოთ დამატებითი არაფიზიკური ველები, ე.წ. “სულები”. მაგალითად, შეიძლება შემოვიტანოთ სკალარულ ნაწილაკთა მულტიპლეტი $\left(\phi^{(+)}\right)^a$, რომელიც ისეთსავე განტოლებას აკმაყოფილებს, როგორსაც η^a ველი

$$D_\mu \partial^\mu \left(\phi^{(+)}\right)^a = 0 \tag{IX-2.9}$$

ამავე დროს უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\left(\phi^{(+)}\right)^a$ ველები ემორჩილებიან ფერმის სტატისტიკას. ამის შედეგად ამ ველების ჩაკეტილი მარყუჟი ზედმეტ (-) ნიშანს შეიცავს η-ნაწილაკის მარყუჟთან შედარებით. და რადგან ეს ორივე ველი ერთსადაიმავე განტოლებას ემორჩილება, მათი მარყუჟები ერთმანეთს გააბათილებენ. ამრიგად მარყუჟებში გაქრება η-ველების წვლილი. რაც შეეხება გარე ასიმპტოტურ (რეალურ) მდგომარეობებს, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\phi^{(+)}$ ველებს ისინი არ შეიცავენ. ამ გზით თავიდან აიცილება ყველა არაფიზიკური ხარისხი.

ყალიბრული ველების დაკვანტვა ფუნქციონალური ინტეგრალით

ზემოთ აღწერილი იდეის დემონსტრირება ავტომატურად შეგვიძლია ფუნქციონალური ინტეგრალის მეშვეობით.

ვიცით, რომ მაწარმოებელი ფუნქციონალური ინტეგრალი ასე ჩაიწერება

$$W\left[\vec{J}\right] = \int \left[d\vec{A}_\mu\right] \exp\left\{i \int d^4x \left[L_{YM}(x) + \vec{J}_\mu(x)\vec{A}_\mu(x)\right]\right\} \qquad \text{(IX-2.10)}$$

პრობლემა წარმოიქმნება იმის გამო, რომ ინტეგრაცია ტარდება ყალიბრული ველების ყველა მნიშვნელობებით. მათ შორის გვხვდება ისეთებიც, რომლებიც ერთმანეთს ყალიბრული გარდაქმნებით უკავშირდებიან. ამრიგად, ერთსადაიმავეს ვითვლით უსასრულოდ ბევრჯერ, რაკი ყალიბრული ჯგუფი არის უწყვეტი. ჩვენი ამოცანაა გამოვყოთ ყალიბრულად არაეკვივალენტური კლასები და მხოლოდ მათზე ჩავატაროთ ფუნქციონალური ინტეგრაცია.

განვიხილოთ საილუსტრაციო მაგალითი:

<u>მოცულობითი მამრავლის გამოყოფა ფუნქციონალური ინტეგრაციის დროს</u>

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ინტეგრალი

$$W = \int dxdy \exp\left[iS(x,y)\right] = \int d\vec{r}\, \exp\left[iS(r)\right] \qquad \text{(IX-2.11)}$$

ექსპონენტაში დგას ორგანზომილებიან სივრცეში მობრუნებების მიმართ ინვარიანტული სიდიდე, რომელიც მხოლოდ მანძილზეა დამოკიდებული

$$S(\vec{r}) = S(\vec{r}_\phi) = S(r) \qquad \vec{r} = (r,\theta) \qquad \text{(IX-2.12)}$$

მობრუნება ასეა განმარტებული

$$\vec{r} \;\to\; \vec{r}_\phi = (r, \theta+\phi) \qquad \text{(IX-2.13)}$$

იტყვიან, რომ ორი კონფიგურაცია, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია ჯგუფური გარდაქმნით, ერთსადაიმავე ჯგუფურ **"ორბიტაზე"** იმყოფება. ჩვენს მაგალითში $S(r)$ მუდმივია ორბიტაზე (წრეწირზე). თუ ამ შემთხვევაში გვსურს გავითვალისწინოთ ინტეგრალში წვლილი მარტო $S(r)$-ის არაეკვივალენტური მნიშვნელობებიდან, უნდა გამოვყოთ ე.წ. "მოცულობითი მამრავლი", რომელიც ეთანადება ინტეგრაციას კუთხეების მიხედვით: $\int d\theta = 2\pi$. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი პროცედურა, რომლის განზოგადება ჩვენთვის საინტერესო შემთხვევაზე შესაძლებელი იქნება.

პირველ რიგში განვიხილოთ თანაფარდობა

$$1 = \int d\phi\, \delta(\theta - \phi) \qquad \text{(IX-2.14)}$$

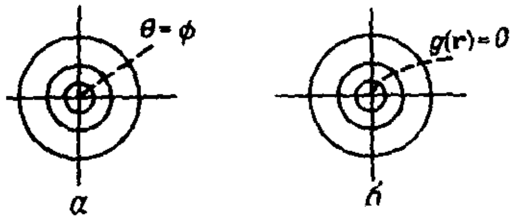
და ჩავსვათ (IX-2.11)-ში:

$$W=\int d\vec{r}\int d\phi \exp[iS(r)]\delta(\theta-\phi)=\int d\phi\int d\vec{r}\exp[iS(r)]\delta(\theta-\phi)=\int d\phi W_{\phi}\ , \qquad \text{(IX-2.15)}$$

სადაც

$$W_{\phi}=\int d\vec{r}\,\delta(\theta-\phi)\exp[iS(r)] \qquad \text{(IX-2.16)}$$

ეს სიდიდე გამოითვლება ϕ კუთხის მოცემული მნიშვნელობისათვის – ამრიგად, ვითვლით W-ს θ-კუთხის ერთი გარკვეული მნიშვნელობისათვის $\theta=\phi$, ხოლო შემდეგ ვაინტეგრებთ ϕ კუთხის ყველა მნიშვნელობების მიხედვით. “ორბიტები” წრეწირებია – ნებისმიერი 2 წერტილი ორბიტაზე ერთმანეთთან დაკავშირებულია ბრუნვით (იხ. ნახაზი 11,ა)



ნახაზი 11. ა და ბ

ბრუნვის მიმართ ინვარიანტულობის (IX-2.12) თვისებიდან ვადგენთ, რომ

$$W_{\phi}=W_{\phi'} \qquad \text{(IX-2.17)}$$

ამრიგად, ორბიტის მოცულობა ფაქტიურად გამოვყავით

$$W=\int d\phi W_{\phi}=W_{\phi}\int d\phi=2\pi W_{\phi} \qquad \text{(Iხ-2.18)}$$

ახლა მოვახდინოთ ამ მარტივი მაგალითის **განზოგადება.** ზოგად შემთხვევაში შეგვიძლია ავირჩიოთ უფრო რთული კავშირი, ვიდრე $\theta=\phi$. ეს კავშირი გადმოვცეთ წირის განტოლებით:

$$g(\vec{r})=0 \qquad \text{(IX-2.19)}$$

და მოვითხოვოთ, რომ ეს წირი კვეთდეს თითოეულ ორბიტას მხოლოდ ერთხელ, რაც ნიშნავს, რომ $g(\vec{r}_{\phi})=0$ განტოლებას უნდა ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი - ϕ რადიუსის მოცემული მნიშვნელობისათვის (იხ. ნახაზი 11 ბ).

შევადგინოთ ახლა ერთიანის, ანუ (IX-2.14) ტიპის გამოსახულება

$$\left[\Delta_g(\vec{r})\right]\int d\phi\,\delta\left[g(\vec{r}_{\phi})\right]=1 \qquad \text{(IX-2.20)}$$

ესაა Δ_g-ს განმარტება. აქედან ჩანს, რომ

$$\Delta_g(\vec{r})=\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial\theta}\Big|_{g=0} \qquad \text{(IX-2.21)}$$

ეს ფორმულა გამომდინარეობს δ-ფუნქციის ცნობილი თვისებიდან

$$\delta[f(x)]=\sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x)|_{x=x_n}}$$

ხოლო თვითონ $\Delta_g(\vec{r})$ ინვარიანტულია 2-განზომილებიანი ბრუნვების მიმართ. მართლაც

$$\left[\Delta_g(\vec{r}_{\phi'})\right]^{-1}=\int d\phi\,\delta\left[g(\vec{r}_{\phi+\phi'})\right]=\int d\phi''\delta\left[g(\vec{r}_{\phi''})\right]=\left[\Delta_g(\vec{r})\right]^{-1} \qquad \text{(IX-2.22)}$$

გავიაროთ ახლა დანარჩენი ეტაპები: შევიტანოთ ინტეგრალქვეშ ერთიანი, ანუ თანაფარდობა (39) და გადავსვათ ინტეგრაციების რიგი (შეადარეთ ზემოთ აღწერილ დროზე დამოკიდებული ცვლადების შეცვლის მეთოდს რადიალურ ფუნქციონალურ ინტეგრალში კვანტურ მექანიკაში, (V-1.2)):

$$W = \int d\phi W_\phi$$

სადაც

$$W_\phi = \int d\vec{r} \exp[iS(r)]\Delta_g(\vec{r})\delta[g(\vec{r}_\phi)] \qquad \text{(IX-2.23)}$$

ეს სიდიდეც ინვარიანტულია ბრუნვების მიმართ:

$$W_{\phi'} = \int d\vec{r}\,' \exp[iS(r)]\Delta_g(\vec{r})\delta[g(\vec{r}_{\phi'})] = \int d\vec{r}\,' \exp[iS(r')]\Delta_g(\vec{r}\,')\delta[g(\vec{r}\,'_\phi)] = W_\phi \qquad \text{(IX-2.24)}$$

აქ ჩვენ შემოვიტანეთ ცვლადი $\vec{r}\,' = (r, \phi')$ და ვისარგებლეთ იმით, რომ $S(r)$, $\Delta_g(\vec{r})$ და ინტეგრაციის ზომა $d\vec{r}$ არიან ინვარიანტული ბრუნვების მიმართ. ამრიგად, ინტეგრალქვეშ "მოცულობითი" მამრავლის გამოსაყოფად შეიძლება შევიტანოთ შემზღუდავი δ-ფუნქცია და გავამრავლოთ Δ_g ფუნქციაზე, რომელიც ზემოთ განვმარტეთ.

მოცულობითი მამრავლი ყალიბრული თეორიის ფუნქციონალურ ინტეგრალში

შევუდგეთ ახლა ყალიბრული ველის დაკვანტვას. ჩვენი ამოცანაა გამოვყოთ მოცულობითი მამრავლი ფუნქციონალურ ინტეგრალში და მაწარმოებელ ფუნქციონალში.

პროცედურა თითქმის დაემთხვევა ზემოთ აღწერილს.

ქმედება ინვარიანტულია ყალიბრული გარდაქმნის მიმართ

$$\vec{A}_\mu(x) \to \vec{A}^\theta_\mu(x),$$

სადაც გარდაქმნა ასეთია

$$\vec{A}^\theta_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} = U(\theta)\left[\vec{A}_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + \frac{1}{ig}U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)\right]U^{-1}(\theta) \qquad \text{(IX-2.25)}$$

$$U(\theta) = \exp\left[-i\vec{\theta}(x)\cdot\vec{\tau}/2\right]$$

აქ $\vec{\theta}$ სიდიდეები არიან ჯგუფის პარამეტრები, რომლებიც დრო-სივრცის წერტილებზეა დამოკიდებული. ქმედება მუდმივია ყალიბრული ჯგუფის ორბიტაზე, რომელიც წარმოადგენს ყველა იმ $\vec{A}^\theta_\mu$-ს ერთობლიობას, რომლებიც მიიღება რომელიმე ფიქსირებული $\vec{A}_\mu$ კონფიგურაციიდან $SU(2)$ ჯგუფის რაიმე $U(\theta)$ გარდაქმნით. სწორი დაკვანტვისას ფუნქციონალური ინტეგრალი უნდა გავრცელდეს მარტო იმ "ჰიპერზედაპირზე", რომელიც თითოეულ ორბიტას კვეთს მარტო ერთხელ. ეს კი ნიშნავს შემდეგს: თუ ჰიპერზედაპირის განტოლებას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$f_a(\vec{A}_\mu) = 0, \qquad a = 1,2,3, \qquad \text{(IX-2.26)}$$

მაშინ განტოლებას

$$f_a(\vec{A}^\theta_\mu) = 0 \qquad \text{(IX-2.27)}$$

უნდა ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი, $\vec{\theta}$, ველის მოცემული $\vec{A}_\mu$ კონფიგურაციისათვის. თავისთავად (IX-2.26) არის ყალიბრების დამაფიქსირებელი პირობა.

პირველ რიგში აუცილებელია განიმარტოს ინტეგრაცია ჯგუფზე. ამისათვის ჩავთვალოთ, რომ θ და θ' იყვნენ ჯგუფის ელემენტები, ე.ი.

როგორც ეს ხშირად არის ხოლმე მიღებული, აღნიშვნების გადატვირთვის თავიდან ასაცილებლად ჯგუფის ელემენტები და პარამეტრები ერთნაირად აღვნიშნოთ. თუ $U(\theta)$ არის $SU(2)$ ჯგუფის რაიმე წარმოდგენის მატრიცა, მაშინ ჯგუფში გამრავლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$U(\theta)U(\theta') = U(\theta\theta') \tag{IX-2.28}$$

ერთეულოვანი ელემენტის მახლობლობაში ვწერთ

$$U(\theta) = 1 - i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}/2 + O(\theta^2) \tag{IX-2.29}$$

ჯგუფზე ინტეგრაციის ზომა შეიძლება ასე ავირჩიოთ:

$$[d\theta] = \prod_{a=1}^{3} d\theta_a \tag{IX-2.30}$$

ეს ზომა ინვარიანტულია შემდეგი შინაარსით:

$$d(\theta\theta') = d\theta'$$

ახლა უკვე შეგვიძლია ვიზრუნოთ მოცულობითი მამრავლის გამოყოფაზე. შემოვიტანოთ ფუნქციონალი $\Delta_f\left[\vec{A}_\mu\right]$:

$$\Delta_f^{-1}\left[\vec{A}_\mu\right] = \int [d\theta(x)]\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu^\theta\right)\right] \tag{IX-2.31}$$

ამრიგად

$$\Delta_f\left[\vec{A}_\mu\right] = \det M_f \tag{IX-2.32}$$

სადაც

$$\left(M_f\right)_{ab} = \frac{\delta f_a}{\delta\theta_b} \tag{IX-2.33}$$

ამრიგად, M_f მატრიცა დაკავშირებულია $f_a\left[\vec{A}_\mu\right]$ ფუნქციების უსასრულოდ მცირე ყალიბრულ გარდაქმნებთან. უფრო ზუსტად, უსასრულოდ მცირე ყალიბ-რულ გარდაქმნებთან, რომლებსაც (IX-2.29)-ის თანახმად აქვთ სახე:

$$A_\mu^{\theta a} = A_\mu^a + \varepsilon^{abc}\theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a, \tag{IX-2.34}$$

მაშინ ყალიბრების მაფიქსირებული ფუნქციები ასე შეიცვლება

$$f_a\left[\vec{A}_\mu^\theta\right] = f_a\left[\vec{A}_\mu\right] + \int d^4y\left[M_f(x,y)\right]_{ab}\theta_b(y) + O(\theta^2) \tag{IX-2.35}$$

(IX-2.26) განტოლების ამონახსნის ერთადერთობის მოთხოვნიდან გამომდინარეობს, რომ $(\det M_f)$ განსხვავდება ნულისაგან.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ $\Delta_f\left[\vec{A}_\mu\right]$ ფუნქცია ყალიბრულად ინვარიანტულია. ამისათვის (IX-2.31) გადავწეროთ ასე

$$\Delta_f^{-1}\left[\vec{A}_\mu\right] = \int [d\theta'(x)]\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu^{\theta'}\right)\right] \tag{IX-2.36}$$

მაშინ

$$\Delta_f^{-1}\left[\vec{A}_\mu^\theta\right] = \int [d\theta'(x)]\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu^{\theta\theta'}(x)\right)\right] = \int [d\theta(x)\theta'(x)]\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu^{\theta\theta'}\right)\right] =$$
$$= \int [d\theta''(x)]\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu^{\theta''}(x)\right)\right] = \Delta_f^{-1}\left[\vec{A}_\mu\right] \tag{IX-2.37}$$

ჩავსვათ ერთიანი ვაკუუმიდან ვაკუუმში გადასვლის ამპლიტუდაში, რომელიც ჩაწერილია ფუნქციონალური ინტეგრალის სახით

$$\int\left[d\vec{A}_\mu\right]\exp\left\{i\int d^4xL(x)\right\} = \int [d\theta(x)]\left[d\vec{A}_\mu(x)\right]\Delta_f\left[\vec{A}_\mu\right]\delta\left[f_a\left(A_\mu^\theta\right)\right]\exp\left\{i\int d^4xL(x)\right\} =$$
$$= \int [d\theta(x)]\left[d\vec{A}_\mu(x)\right]\Delta_f\left[\vec{A}_\mu\right]\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu\right)\right]\exp\left\{i\int d^4xL(x)\right\} \tag{IX-2.38}$$

ამ გამოსახულების მისაღებად ჩვენ ვისარგებლეთ აქ შემავალი ფაქტორების ინვარიანტულობით ყალიბრული გარდაქმნების მიმართ. ახლა ნათელია, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დამოუკიდებელია $\theta(x)$-ზე და მის მიხედვით

ინტეგრაცია იძლევა ორბიტის უსასრულო მოცულობას, რისი გამოყოფისაკენ მივისწრაფოდით ჩვენ.

ამრიგად, ყალიბრული ველების მაწარმოებელი ფუნქციონალი შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე:

$$W_f\left[\vec{J}\right]=\int\left[d\vec{A}_\mu\right]\left(\det M_f\right)\delta\left[f_a\left(\vec{A}_\mu\right)\right]\exp\left\{i\int d^4x\left[L(x)+\vec{J}_\mu\cdot\vec{A}^\mu\right]\right\} \qquad \text{(IX-2.39)}$$

ამას უწოდებენ **ფადეევ-პოპოვის ანზატცს ანუ ჩასმას.**

ვხედავთ, რომ ასეთნაირად გამოირიცხა ყველა ზედმეტი ინტეგრაცია ფუნქციონალურ ზომაში შემდეგი მამრავლის შეტანით $\det\left[\delta f/\delta\theta\right]\delta\left[f\left(A_\mu\right)\right]$.

განვიხილოთ კონკრეტული გამოყენებანი:

პირველ რიგში აღვნიშნოთ, რომ ველის კვანტურ თეორიაში გამოიყენება სხვადახვა ყალიბრებები, მათ შორის ყველაზე გავრცელებულია შემდეგი:

* აქსიალური ყალიბრება $A_3^a=0$
* კულონური ყალიბრება $\nabla_i A_i^a=0$
* ჰამილტონური ყალიბრება $A_0^a=0$
* ზოგადი აქსიალური ყალიბრება $n\cdot A^a=0,\quad n^2<0$
* სინათლისმაგვარი ყალიბრება; როგორც ზემოთ, ოღონდ $n^2=0$

უკანასკნელ ორ ყალიბრებაში n_μ არის ნებისმიერი მუდმივი 4-ვექტორი, ხოლო ყალიბრების დამაფიქსიებელ წევრს ლაგრანჟიანში აქვს სახე $-\frac{1}{2\xi}\left(nA^2\right)^2$.

* ზემოთ ჩამოთვლილი ყალიბრებები არიან არაკოვარიანტული. კოვარიანტული ყალიბრებებიდან ყველაზე ხშირად გამოიყენება ლორენცის ყალიბრება: $\partial^\mu A_\mu^a=0$, ხოლო ყალიბრების მაფიქსირებულ წევრში $-\frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu^a\right)^2$ აიღება:

- ლანდაუს ყალიბრებაში $\xi=0$
- ფეინმანის ყალიბრებაში $\xi=1$
- უნიტარული ყალიბრებაში $\xi=\infty$

ამ ცნობების შემდეგ სასურველია ფადეევ-პოპოვის მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ დაკვანტვის მაგალითი რომელიმე კონკრეტულ ყალიბრებაში:

ა) ფადეევ-პოპოვის ანზატცი აქსიალურ ყალიბრებაში

ყალიბრული პირობის სახით ავიღოთ შემდეგი მაფიქსირებელი ფუნქცია

$$f_a=A_3^a=0$$

მაშინ (IX-2.34) იღებს სახეს

$$f_a\left(\vec{A}_\mu^\theta\right)=A_3^a+\varepsilon^{abc}\theta^b A_3^c-\frac{1}{g}\partial_3\theta^a=-\frac{1}{g}\partial_3\theta^a$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მატრიცა $M_f = -\frac{1}{g}\partial_3\delta_{ab}$ არ არის დამოკიდებული ყალიბრულ ველზე. ამ დროს შეგვიძლია უგულვებელვყოთ იაკობიანის მამრავლი $(\det M_f)$ და დავწეროთ

$$W_f\left[\vec{J}\right] = \int\left[d\vec{A}_\mu\right]\delta\left(\vec{A}_3\right)\exp\left\{iS\left[\vec{J}\right]\right\}$$

$$S\left[\vec{J}\right] = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + J^a_\mu A^{a\mu}\right]$$

უფრო მოსახერხებელია ვიმუშავოთ ფუნქციონალის განსხვავებული ფორმით

$$W'_f\left[\vec{J}\right] = \int\left[d\vec{F}_{\mu\nu}\right]\left[d\vec{A}_\mu\right]\delta\left(\vec{A}_3\right)\exp\left\{iS'\left[\vec{J}\right]\right\},$$

სადაც

$$S'\left[\vec{J}\right] = \int d^4x\left[-\frac{1}{2}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{4}F^{a\mu\nu}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right)\right] + J^a_\mu A^{a\mu}$$

თუ ამ გამოსახულებას ვაინტეგრებთ $F^a_{\mu\nu}$-ს მიხედვით W'_f-ის გამოსახულება გადავა W_f-ში.

ახლა აუცილებელია დავრწმუნდეთ, რომ ფადეევ-პოპოვის ფორმულირება თვითშეთანხმებულია ანუ თავსებადია კანონიკურ დაკვანტვასთან. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უნდა დავრწმუნდეთ, რომ ფუნქციონალურ ინტეგრალში განხილულ შეზღუდვებს მივყავართ დინამიკური ცვლადების იმავე კრებულთან, რასაც იძლეოდა კანონიკური დაკვანტვა.

ამისათვის ჯერ ჩამოვთვალოთ დამოუკიდებელი კანონიკური ცვლადები არჩეულ ყალიბრებაში $A^a_3 = 0$. ლაგრანჟიანს S'-ში აქვს სახე

$$L' = -\frac{1}{2}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}F^{aij}\left(\partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i + g\varepsilon^{abc}A^b_i A^c_j\right) +$$
$$+ F^{aoi}\left(\partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 + g\varepsilon^{abc}A^a_0 A^c_i\right) + F^{ai3}\left(-\partial_3 A^a_i\right) + F^{a03}\left(-\partial_3 A^a_0\right)$$

სადაც $i, j = 1{,}2$.

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები

$$\partial^\lambda \frac{\delta L'}{\delta\left(\partial^\lambda F^a_{\mu\nu}\right)} = \frac{\delta L'}{\delta F^a_{\mu\nu}},$$

$$\partial^\lambda \frac{\delta L'}{\delta(\partial^\lambda A^a_\mu)} = \frac{\delta L'}{\delta A^a_\mu}$$

იძლევიან შემდეგ ბმების განტოლებებს (ანუ განტოლებებს, რომლებიც არ შეიცავენ დროის მიხედვით წარმოებულს):

$$F^a_{ij} = \partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i + g\varepsilon^{abc}A^b_i A^c_j, \qquad F^a_{i3} = -\partial_3 A^a_i,$$

$$F^a{}_{03} = -\partial_3 A^a_0 \qquad \partial^i F^a_{oi} - \partial^3 F^a_{03} = -g\varepsilon^{abc}F^b_{0i}A^{ic}$$

გარდა ამისა დინამიკური განტოლებები ასეთია

$$F^a_{oi} = \partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 + g\varepsilon^{abc}A^b_0 A^c_i$$
$$\partial^\mu F^a_{\mu i} = -g\varepsilon^{abc}\left(F^b_{ij}A^{ci} + F^b_{oi}A^{c0}\right)$$

აქედან ვასკვნით, რომ $A^a_0, F^a_{ij}, F^a_{i3}, F^a_{03}$ არიან დამოკიდებული ცვლადები. ზემო მოყვანილი ბმების განტოლებებით ისინი შეგვიძლია გამოვრიცხოთ S'-ის გამოსახულებიდან, გამოვხატავთ რა დანარჩენი ცვლადებით A^a_i და F^a_{0i}. დამოუკიდებელ კანონიკურ ცვლადთა ასეთ იდენტიფიკაციას მივყავართ მაწარმოებელი ფუნქციონალის შემდეგ გამოსახულებამდე

$$W''_f\left[\vec{J}\right] = \int\left[d\vec{F}_{01}\right]\left[d\vec{F}_{02}\right]\left[d\vec{A}_1\right]\left[d\vec{A}_2\right]\exp\left\{iS''\left[\vec{J}\right]\right\}$$

ფადეევ-პოპოვის ანზატცის თავსებადობა კანონიკური დაკვანტვის პროცედურასთან დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ეს ფუნქციონალური ინტეგრალი ეკვივალენტურია W'-ის, და ამიტომაც W-სი. ამისათვის აუცილებელია დავამტკიცოთ, რომ თუ დინამიკური ცვლადი ქმედებაში შედის სულ მცირე კვადრატულად (მუდმივი კოეფიციენტით), მაშინ მის მიხედვით ინტეგრაცია ტოლფასია მისი გამორიცხვისა ქმედებიდან ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებების დახმარებით.

ამ დასკვნის სამართლიანობა ჩანს შემდეგი საილუსტრაციო მაგალითით: განვიხილოთ (გაუსის) ფუნქციონალური ინტეგრალი

$$\int[d\phi]\exp[iS[\phi]]=\int[d\phi]\exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}a\phi^2(x)+f(x)\phi(x)\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{i}{2a}\int d^4x[f(x)]^2\right\}$$

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება, რომელიც ამ ქმედებიდან მიიღება, შემდეგი სახისაა

$$a\phi(x)+f(x)=0$$

ქმედებიდან $\phi(x)$-ის გამორიცხვით მივიღებთ ტოლობას

$$S=-\frac{1}{2a}\int d^4x[f(x)]^2\ ,$$

რომელიც კვლავ გვაბრუნებს ზემოთმოყვანილ ქმედებასთან. ეს ასრულებს იმის დემონსტრირებას, რომ ფადეევ-პოპოვის ანზატცი ნამდვილად იძლევა სწორ შეზღუდვებს ინტეგრაციის ზომაზე. როგორც უკვე ვიცით ამ თავის დასაწყისიდან, ჰამილტონის ფორმალიზმი, რომელიც ემყარება შემდეგ მაწარმოებელ ფუნქციონალს

$$W[J]\sim\int[d\phi d\pi]\exp\left\{i\int d^4x[\pi\partial_0\phi-H(\pi,\phi)+J\phi]\right\}$$

ეკვივალენტურია ლაგრანჟის ფორმალიზმისა, რომელშიც

$$W[J]\sim\int[d\phi]\exp\left\{i\int d^4x\left[L(\phi,\partial_\mu\phi)+J\phi\right]\right\}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ზემოთ მიღებული W'' ფუნქციონალი შეესაბამება ჰამილტონურ ფორმულირებას, რომელშიც F_{0i}^a კომპონენტები არიან განივი კანონიკური იმპულსები.

რადგან აქსიალურ ყალიბრებაში ფადეევ-პოპოვის დეტერმინანტი შეგვიძლია ჩამოვუშვათ, დაკვანტვის პროცედურა ამ ყალიბრებაში გამოიყურება საკმაოდ მარტივად. ადვილია იმაში დარწმუნება, რომ ასევეა ნებისმიერ არაკოვარიანტულ ყალიბრებებში. ოღონდ არაკოვარიანტულ ყალიბრებებში ცხადი სახით იკარგება ლორენც-ინვარიანტულობა და, ამიტომ, ფეინმანის წესებს აქვთ საკმაოდ რთული სახე.

ბ. აბელური ყალიბრული თეორია

ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ ელექტრომაგნიტური ველის დაკვანტვა. ბუნებრივია, რომ ფუნქციონალური ინტეგრალით დაკვანტვის მეთოდი, რომელიც ახლახან აღვწერეთ, შეიძლება გამოვიყენოთ უფრო მარტივ შემთხვევაშიც –

აბელური ყალიბრული თეორია. ამ შემთხვევაში გარდაქმნას აქვს ჩვეულებრივი $U(1)$ სახე:

$$A_\mu^\theta = A_\mu - \frac{i}{g}\partial_\mu \theta(x). \qquad \text{(IX2.40)}$$

გასაგებია, რომ ყალიბრული პირობის ნებისმიერი შერჩევისას, რომელიც იქნება წრფივი ყალიბრული $A_\mu(x)$ ველის მიხედვით, M_f მატრიცა, შემოყვანილი (IX-2.32) ან (IX-2.33) თანაფარდობით, არ იქნება დამოკიდებული A_μ-ზე. ამის გამო, ფადეევ-პოპოვის მამრავლი $(\det M_f)$ არაარსებითი იქნება ფიზიკური თვალსაზრისით და შეგვიძლია ჩამოვუშვათ ფუნქციონალურ ინტეგრალში:

$$W_f[J] = \int [dA_\mu]\delta[f(A_\mu)]\exp\left\{i\int d^4x\left[L(x) + J_\mu(x)A^\mu(x)\right]\right\} \qquad \text{(IX-2.41)}$$

ა) ფეინმანის წესები კოვარიანტულ ყალიბრებებში

ყველაზე მეტი პრაქტიკული ინტერესი გააჩნია კოვარიანტულ ყალიბრებას, რომელშიც სხვადასხვა არაკოვარიანტული ყალიბრებებისაგან განსხვავებით, აუცილებელი ხდება ხოლმე არაფიზიკური "სულების ველების" შემოყვანა.

ამოსავალი მაწარმოებელი ფუნქციონალის მისაღებად რამდენადმე გარდავქმნათ (IX-2.39) გამოსახულება. სახელდობრ, დამატებითი ფადეევ-პოპოვის მამრავლი უნდა ავიტანოთ ექსპონენტაში.

– ფადეევ-პოპოვის "სულები"

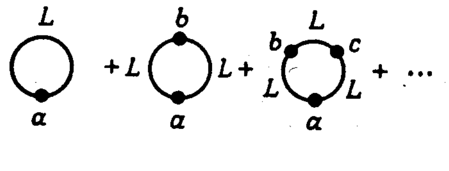
სიდიდე $\det M_f$ შეიძლება პირდაპირ ჩაიწეროს შემდეგი ექსპონენტის სახით;

$$\det M_f = \exp\{tr(\ln M_f)\} \qquad \text{(IX-2.42)}$$

თუ აქ შემავალ მატრიცას ასე წარმოვადგენთ $M_f = 1 + L$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{gathered}\exp\{tr(\ln M_f)\} = \exp\left\{trL - \frac{1}{2}trL^2 + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}trL^n + ...\right\} = \\ \exp\left\{\int d^4xL_{aa}(x,x) - \frac{1}{2}\int d^4xd^4yL_{ab}(x,y)L_{ba}(y,x) + ...\right\}\end{gathered} \qquad \text{(IX-2.43)}$$

ეს მწკრივი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მწკრივი მარყუჟებად, რომლის წევრები შეესაბამებიან ფიქტიური კომპლექსური სკალარული $c(x)$ ველების იზოტრიპლეტს.



ნახაზი 12

იმის გამო, რომ გაუსის ტიპის ინტეგრალი გრასმანული ცვლადების შემთხვევაში უდრის სათანადო ოპერატორის დეტერმინანტს მრიცხველში, შეგვიძლია ფადეევ-პოპოვის დეტერმინანტი წარმოვადგინოთ დამხმარე გრასმანული ველების საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\det M_f \sim \int [dc][dc^+]\exp\left\{i\int d^4x d^4y \sum_{a,b} c_a^+(x)[M_f(x,y)]_{ab} c_b(y)\right\} \qquad \text{(IX-2.44)}$$

ამრიგად, ფადეევ-პოპოვის დეტერმინანტი ატანილია ექსპონენტაში, რაც გაამარტივებს მის ფიზიკურ (დიაგრამულ) ინტერპრეტაციას.

– ყალიბრების დამაფიქსირებელი წევრი

ახლა ექსპონენტაში ავიტანოთ ყალიბრების დამაფიქსირებელი ფაქტორი. ამის მისაღწევად ჯერ განვაზოგადოთ ყალიბრების პირობა, რომელიც ავიღოთ ასე

$$f_a[\vec{A}_\mu] = B_a(x) \qquad \text{(IX-2.45)}$$

სადაც $B_a(x)$ არის ნებისმიერი ფუნქცია, დამოუკიდებელი ყალიბრულ ველზე. პირველ რიგში უნდა განვაზოგადოთ Δ_f ფუნქცია (IX-2.45) პირობის შესაბამისად,

$$\int [d\theta(x)] \Delta_f [\vec{A}_\mu] \delta\left[f_a(\vec{A}_\mu^\theta) - B_a(x)\right] = 1 \qquad \text{(IX-2.46)}$$

ეს განმარტება, ცხადია, იძლევა იმავე Δ_f ფუნქციას, რასაც (IX-2.36).

ორბიტის უსასრულო მოცულობის გამოსაყოფად მაწარმოებელი ფუნქციონალი ასე გადავწეროთ

$$W[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu][d\vec{B}](\det M_f)\delta\left[f_a(\vec{A}_\mu) - B_a\right]\exp\left\{i\int d^4x\left[L(x) + \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu - \frac{1}{2\xi}\vec{B}^2(x)\right]\right\} \qquad \text{(IX-2.47)}$$

ჩვენ ამ ინტეგრალში ჩავრთეთ აგრეთვე არაარსებითი მუდმივი

$$const \sim \int [d\vec{B}]\exp\left\{-\frac{1}{2\xi}\int d\ x\vec{B}^2(x)\right\},$$

სადაც ξ არის ნებისმიერი მუდმივი კოეფიციენტი – ყალიბრული პარამეტრი. მიღებული მაწარმოებელი ფუნქციონალი (IX-2.47) ფადეევ-პოპოვის ანზატცის (IX-2.39) ფუნქციონალისაგან განსხვავდება არაარსებითი ნორმირების მამრავლით.

ახლა უკვე შეგვიძლია მოვხსნათ $[d\vec{B}(x)]$ ინტეგრაცია. ამავე დროს გავითვალისწინოთ (IX-2.44). ვპოულობთ:

$$W[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu][d\vec{c}][d\vec{c}^+]\exp\{iS_{eff}[\vec{J}]\} \qquad \text{(IX-2.48)}$$

აქ

$$S_{eff}[\vec{J}] = S[\vec{J}] + S_{gf} + S_{FP} \qquad \text{(IX-2.49)}$$

ხოლო ეფექტურ ქმედებაში დამატებითი წევრებია:

(ა) ყალიბრების დამაფიქსირებელი წევრი

$$S_{gf} = -\frac{1}{2\xi}\int d^4x\{f_a[\vec{A}_\mu(x)]\}^2 \qquad \text{(IX-2.50)}$$

(ბ) ფადეევ-პოპოვის სულების წევრი

$$S_{FP} = \int d^4x d^4y \sum_{a,b} c_a^+(x)[M_f(x,y)]_{ab} c_b(y) \qquad \text{(IX-2.51)}$$

–კოვარიანტული ყალიბრება

განვიხილოთ ახლა სპეციალური შერჩევა – კოვარიანტული ანუ ლორენცის ყალიბრება:

$$f_a(\vec{A}_\mu) = \partial_\mu A_a^\mu = 0, \qquad a = 1,2,3 \qquad \text{(IX-2.52)}$$

ინფინიტეზიმალური ყალიბრული გარდაქმნებისას

$$U(\theta(x)) = 1 + i\vec{\theta}(x)\cdot \vec{\tau}/2 + O(\theta^2)$$

$$A_\mu^{a\theta}(x) = A_\mu^a(x) + \varepsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^a(x) \qquad \text{(IX-2.53)}$$

გვაქვს

$$f^a\left(\vec{A}_\mu^\theta\right) = f^a\left(\vec{A}_\mu\right) + \partial^\mu\left[\varepsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)\right] =$$

$$= f^a\left(\vec{A}_\mu\right) + \int d^4y\left[M_f(x,y)\right]_{ab}\theta^b(y) \qquad \text{(IX-2.54)}$$

ამიტომ

$$\left[M_f(x,y)\right]_{ab} = -\frac{1}{g}\partial^\mu\left[\delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{abc}A_\mu^c\right]\delta^4(x-y) \qquad \text{(IX-2.55)}$$

ამ გამოსახულებათა მეშვეობით შეგვიძლია გამოვთვალოთ დამატებითი წევრები ეფექტურ ქმედებაში:

$$S_{gf} = -\frac{1}{2\xi}\int d^4x\left(\partial^\mu \vec{A}_\mu\right)^2 \qquad \text{(IX-2.56)}$$

$$S_{FP} = \frac{1}{g}\int d^4x\sum_{a,b} c_a^+(x)\partial^\mu\left[\delta_{ab}\partial_\mu - g\varepsilon_{abc}A_\mu^c\right]c_b(x) \qquad \text{(IX-2.57)}$$

თუ სულების ველებისათვისაც შემოვიტანთ წყაროებს η_a^+, η_a, მაწარმოებელი ფუნქციონალის საბოლოო ფორმა ასე გამოიყურება:

$$W_f\left[\vec{J}, \vec{\eta}, \vec{\eta}^+\right] = \int\left[d\vec{A}_\mu d\vec{c} d\vec{c}^+\right]$$

$$\exp\left\{i\int d^4x\begin{bmatrix} L(x) - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu^a\right)^2 + c_a^+\partial^\mu\left[\delta_{ab}\partial_\mu - g\varepsilon_{abc}A_\mu^c\right]c_b + \\ + J_\mu^a A^{\mu a} + \eta^a c^{+a} + \eta^{+a}c^a \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{(IX-58)}$$

ამ ფორმულაში სულების ველები გადანორმილია $1/g$ მამრავლით.

IX-3. შეშფოთების თეორიული გაშლა კოვარიანტულ ყალიბრებაში

შეშფოთების თეორიის მწკრივის მისაღებად, უპირველეს ყოვლისა, წარმოვადგინოთ ეფექტური ქმედება იანგ-მილსის თეორიაში შემდეგი ჯამის სახით $S_{eff} = S_0 + S_I$, სადაც თავისუფალი ქმედება S_0 - კვადრატულია ველების მიხედვით:

$$S_0 = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2 + c_a^+ \partial^2 c_a + J_\mu^a A^{\mu a} + \eta^{a+} c^a + \eta^a c^{a+} \right], \qquad \text{(IX-3.1)}$$

ხოლო ურთიერთქმედების აღმწერი წევრია

$$S_I\left[\vec{A}_\mu, c, c^+\right] = \int d^4x \Big(\left[-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right) g \varepsilon^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} + \frac{1}{4} g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} \right] -$$
$$- igc^{a+} \partial^\mu \varepsilon^{abc} A_\mu^c c^b \Big) \qquad \text{(IX-3.2)}$$

მაწარმოებელი ფუნქციონალი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$W\left[\vec{J}, \vec{\eta}, \vec{\eta}^+\right] = \exp\left\{ iS_I \left[\frac{\delta}{i\delta \vec{J}_\mu}, \frac{\delta}{i\delta \vec{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta \vec{\eta}^+} \right] \right\} W_A^0\left[\vec{J}\right] W_c^0\left[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+\right] \qquad \text{(IX-3.3)}$$

სადაც

$$W_A^0\left[\vec{J}\right] = \int D\vec{A}_\mu \exp\left\{ i\int d^4x \left[-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^{\mu a}\right)^2 + J_\mu^a A^{\mu a} \right] \right\} \qquad \text{(IX-3.4)}$$

$$W_c^0\left[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+\right] = \int D\vec{c}^+ D\vec{c} \exp\left\{ -i\int d^4x \left[c^{a+} \partial^2 c^a - \eta^{a+} c^a - \eta^a c^{a+} \right] \right\} \qquad \text{(IX-3.5)}$$

– **პროპაგატორები:**

ამ კვადრატული ფორმებიდან შეგვიძლია მოვძებნოთ ცალკეული ველების პროპაგატორები. $\vec{A}_\mu$ ველის პროპაგატორის საპოვნელად გადავწეროთ W_A^0 ასე:

$$W_A^0\left[\vec{J}\right] = \int D\vec{A}_\mu \exp\left\{ i\int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^a \left(g^{\mu\nu}\partial^2 - \frac{\xi - 1}{\xi}\partial^\mu \partial^\nu \right) \delta_{ab} A_\nu^b + J_\mu^a A^{\mu a} \right] \right\} =$$
$$= \int D\vec{A}_\mu \exp\left\{ i\int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^a K_{ab}^{\mu\nu} A_\nu^b + J_\mu^a A^{\mu a} \right] \right\} \qquad \text{(IX-3.6)}$$

სადაც ოპერატორს

$$K_{ab}^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\nu}\partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu \right] \delta_{ab} \qquad \text{(IX-3.7)}$$

გააჩნია შებრუნებული. ახლა $D\vec{A}_\mu$ ინტეგრაციას ჩავატარებთ და მიიღება

$$W_A^0\left[\vec{J}\right] = \exp\left\{ -\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J_\mu^a(x) G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^b(y) \right\} \qquad \text{(IX-3.8)}$$

აქ

$$G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \delta_{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[-\left(g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \qquad \text{(IX-3.9)}$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ეს სიდიდე გრინის ფუნქციის განტოლებას აკმაყოფილებს:

$$\int d^4y K_{ab}^{\mu\nu}(x-y) G_{\nu\lambda}^{bc}(y-z) = g_\lambda^\mu \delta_a^c \delta^4(x-y) \qquad \text{(IX-3.10)}$$

ანალოგიურად ვიპოვით “ფადეევ-პოპოვის სულების” ველის პროპაგატორსაც:

$$W_c^0\left[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+\right] = \exp\left\{ -i\int d^4x d^4y \eta^{a+}(x) G^{ab}(x-y) \eta^b(y) \right\}$$

სადაც

$$G^{ab}(x-y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}\delta_{ab} \qquad \text{(IX-3.11)}$$

.

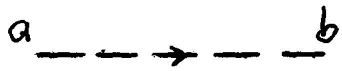
ამ ფორმულებზე დაყრდნობით გვაქვს ფეინმანის შემდეგი წესები:

1. ვექტორული (იანგ-მილსის) ბოზონების პროპაგატორი

$$\Delta^{ab}_{\mu\nu}(k) = -i\delta_{ab}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{1}{k^2+i\varepsilon}$$

μ, a  ν, b

2. ფადეევ-პოპოვის “სულების” პროპაგატორი



$$i\Delta(k) = -i\delta_{ab}\frac{1}{k^2+i\varepsilon}$$

ამავე დროს უნდა შევნიშნოთ, რომ “სულების” ველს, ისევე როგორც ფერმიონულ ველს, აქვს მიმართულება, ე.ი. “სული” განსხვავდება თავისი ანტინაწილაკისაგან.

ყალიბრული ველების ურთიერთქმედება (წვეროები):

არააბელურ ყალიბრულ თეორიებში ყალიბური ველები ურთიერთქმედებენ თავისთავთან, აქვთ თვითზემოქმედება. ეს პოლარიზაციის ვექტორებით (ველების ტალღური ფუნქციებით) აღიწერება შემდეგნაირად

$$\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2)\varepsilon^\lambda(k_3)\Gamma^{abc}_{\mu\lambda\nu}(k_1,k_2,k_3)$$

და

$$\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2)\varepsilon^\lambda(k_3)\varepsilon^\rho(k_4)\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

წვეროებისთვის ფეინმანის წესები გამომდინარეობს S_I-ის გამოსახულებიდან. ყველაზე ადვილად მათი მიღება შეიძლება ველების გადასმის მიმართ სიმეტრიების მოსაზრებების გამოყენებით. იმპულსურ წარმოდგენაში S_I-ის პირველი წევრი ასეთი სახისაა

$$\frac{1}{3!}\tilde{A}^{a\mu}(k_1)\tilde{A}^{b\nu}(k_2)\tilde{A}^{c\lambda}(k_3)\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3),$$

სადაც $\tilde{A}$ ფუნქციები არიან ყალიბრული ველების ფურიე-სახეები, ხოლო Γ - წვეროები, რომლებიც უნდა იყვნენ სრულიად სიმეტრიული ყალიბრული ველების გადასმის მიმართ. რაც შეეხება სტრუქტურას ყალიბრულ $SU(2)$ ჯგუფთან დაკავშირებით, ის ასე ფიქსირდება

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3) = \varepsilon^{abc}\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3),$$

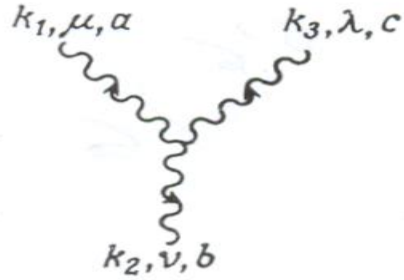
ხოლო ამ ფუნქციის ლორენც-სტრუქტურა შეიძლება გამოვიყვანოთ. ის შედგება წევრებისაგან, რომელთაც აქვთ სახე $k_{a\mu}g_{\nu\lambda}$. ამ წევრების ზუსტი კომბინაციის დადგენა შეგვიძლია ამ ფაქტორის ანტისიმეტრიულობიდან $\mu\leftrightarrow\nu$, $1\leftrightarrow 2$, და ა.შ., ინდექსების გადასმის მიმართ, რადგან ტენზორი ε^{abc} თავის მხრივ სრულიად ანტისიმეტრიულია. ასე თუ მოვიქცევით, ვიპოვით

$$i\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)=$$

3-წვერო:

$$ig\varepsilon^{abc}\begin{bmatrix}(k_1-k_2)_\lambda g_{\mu\nu}+\\(k_2-k_3)_\mu g_{\nu\lambda}+\\(k_3-k_1)_\nu g_{\mu\lambda}\end{bmatrix}$$

$$k_1+k_2+k_3=0$$

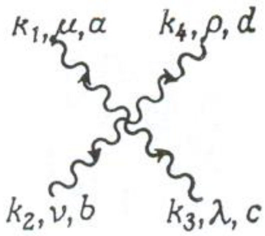


4-წვერო:

$$i\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho}=ig^2$$

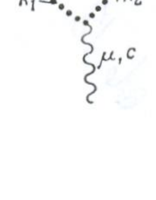
$$\begin{bmatrix}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{cde}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}\right)+\\\varepsilon^{ace}\varepsilon^{bde}\left(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}\right)\\\varepsilon^{ade}\varepsilon^{cbe}\left(g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu}-g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu}\right)\end{bmatrix}$$

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0$$



“სულის” და ბოზონის წვერო

$$i\Gamma^{abc}_{\mu}=g\varepsilon^{abc}k_{1\mu}$$



სულების ხაზები დიაგრამებში შედიან მარტო მარყუჟების სახით.

ფერმიონები:

წმინდა იანგ-მილსის თეორიაში ფერმიონების შემოტანა ადვილია – საკმარისია ლაგრანჟიანს დაემატოს ყველა შესაძლო ყალიბრულად- ინვარიანტული წევრები, რომელთა განზომილება არ აღემატება ოთხს:

$$L_f = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\psi\ ,$$

სადაც

$$D_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - igT^{a}A_{\mu}^{a}\psi$$

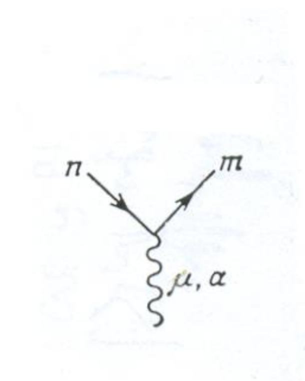
მატრიცა T^a შეესაბამება გენერატორს მოცემულ წარმოდგენაში. მაგალითად, თუ ψ არის $SU(2)$ დუბლეტი, მაშინ $T^a = \tau^a/2$. ამრიგად, ფერმიონებისათვის გვაქვს ფეინმანის წესები

ფერმიონული პროპაგატორი

$$iS_F\left(p\right)_{mn} = \delta_{mn}\frac{1}{\gamma\cdot p - m + i\varepsilon}$$

ფერმიონ-ყალიბრული ბოზონის წვერო:

$$i\Gamma_{nm}^{a\mu} = ig\left(T^{a}\right)_{nm}\gamma^{\mu}$$



X. დასკვნების ნაცვლად

როგორც ზემოთ მოყვანილი მასალიდან ჩანს, ფუნქციონალური მეთოდი კვანტურ ფიზიკაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი და მძლავრი მეთოდია. მისი მეშვეობით ხერხდება ჩაკეტილი გამოსახულებების მიღება თეორიის ისეთი კრიტიკული სიდიდეებისათვის, როგორიცაა სხვადასხვა გრინის და კორელაციური ფუნქციები. აგრეთვე მნიშვნელოვანია ის გარემოება, რომ ყველაფერი ეს ჩაიწერება ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალის საშუალებით. მართალია ფუნქციონალური ანუ წირებზე ინტეგრალების გამოთვლა არც ისე ადვილია, ამის მიუხედავად მთავარი ფიზიკური ფაქტორებისათვის ჩაკეტილი გამოსახულებების არსებობის ფაქტი უკვე მეტად მისასალმებელია, რადგან დროთა განმავლობაში წირებზე ინტეგრალების გამოთვლის ტექნიკა ვითარდება და სულ უფრო მეტი ამოცანების ამოხსნა ხერხდება. გავიხსენოთ თუნდაც კულონური პოტენციალის ისტორია, რომლის ცხადი სახით ამოხსნა მოხერხდა ფეინმანის მეთოდის შექმნიდან დაახლოებით 30 წლის შემდეგ, რისთვისაც უნდა დამუშავებულიყო ისეთი არატრივიალური ტექნიკური საკითხი, როგორიც არის ცვლადთა გარდაქმნა წირებზე ინტეგრალში. ჩაკეტილი გამოსახულების არსებობა, ბუნებრივია, ნიშნავს სათანადო ფაქტორებისათვის ამოხსნის ცხადი სახით წარმოდგენას, რომლის შემდგომი შესწავლა შესაძლებელი იქნება სულ მცირე, რიცხობრივად დღევანდელი გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებით.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ ფუნქციონალური წარმოდგენები მოსახერხებელია სხვადასხვა გრინის ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესასწავლად, რაც არანაკლებ მნიშვნელოვანია.

წინამდებარე წიგნში მოვიყვანეთ ფუნქციონალურ ინტეგრალებთან მოპყრობის არსებული მეთოდები, აგრეთვე ამოხსნადი მაგალითები. განსაკუთრებული სიმძლავრე ფუნქციონალურმა მეთოდებმა გამოამჟღავნა ველის კვანტურ თეორიასა და სტატისტიკურ ფიზიკაში, ყალიბრული ველების თანამედროვე კვანტური თეორია აიგო ძირითადად ფუნქციონალურ, სახელდობრ, ფეინმანის წირზე ინტეგრალზე დაყრდნობით. აქ არსებითი მნიშვნელობა ჰქონდა ფადეევისა და პოპოვის მიერ განვითარებულ მეთოდს ყალიბრულად ეკვივალენტურ ორბიტებზე ინტეგრაციების გამოცალკევების შესახებ. რამაც გამოიწვია ყალიბრულ ჯგუფზე რეგულარული ინტეგრაცია და არაერთი ძველისძველი პრობლემების მოხსნა. როგორც აღვნიშნეთ, ფადეევ-პოპოვის მეთოდმა გადამწყვეტი როლი შეასრულა ცვლადთა გარდაქმნის თეორიის განზოგადებაში ფუნქციონალურ მიდგომაში. მისი გამოყენების არეალში მოექცა თანამედროვე სიმეტრიების თეორიის ისეთი მნიშვნელოვანი პრობლემა, როგორიცაა სიმეტრიების სპონტანური და დინამიკური დარღვევები, რაც თანამედროვე თეორიული აზროვნების ქვაკუთხედს წარმოადგენს.

და ბოლოს, აღვნიშნოთ, რომ ტექსტში სხვადასხვა ადგილას მითითებული ნაშრომების გარდა ფუნქციონალურ მეთოდებზე არსებობს საკმაოდ მდიდარი ლიტერატურა, რომელთა უდიდესი ნაწილი გადმოცემულია ველის კვანტური თეორიის სახელმძღვანელოებში და მონოგრაფიებში.

უკანა ყ დ ა (სურათით)

ანზორ ალექსანდრეს ძე ხელაშვილი (დაბ.1938)

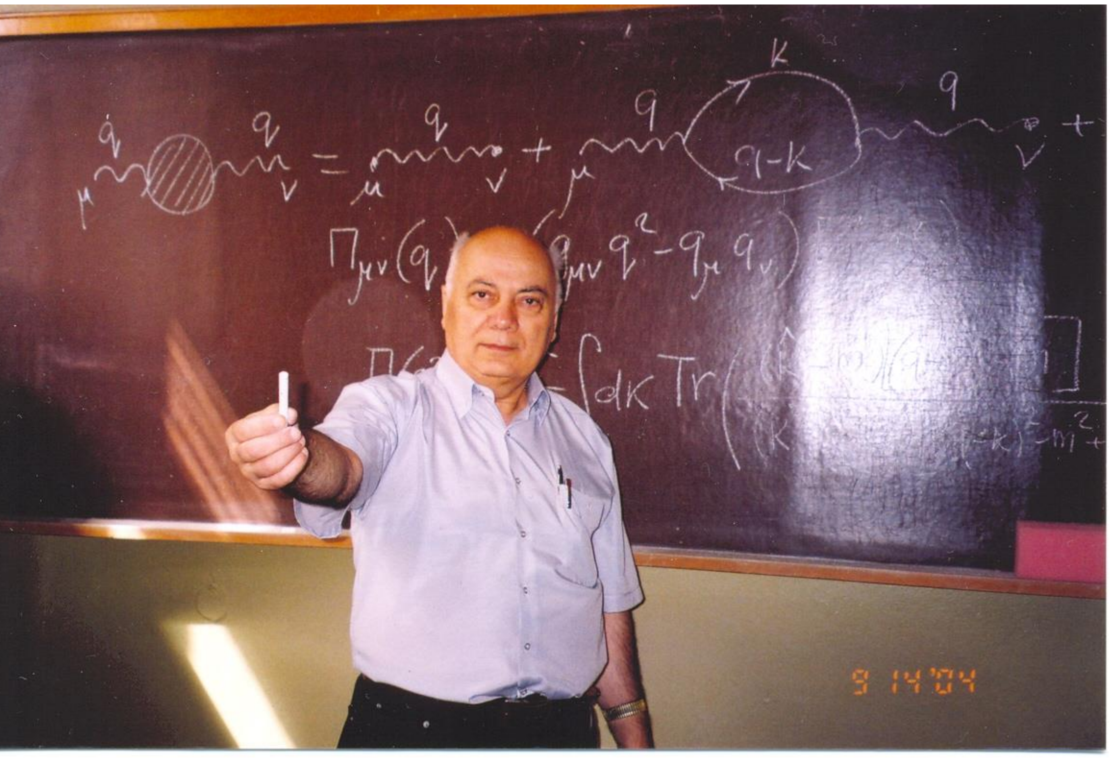
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი.

პროფ. ა.ხელაშვილი სხვადასხვა დროს მუშაობდა თსუ ფიზიკის ფაკულტეტზე, თსუ მაღალი ენერგიების ფიზიკის ინსტიტუტში სამეცნიერო ლაბორატორიის და განყოფილების გამგედ, ფიზიკის ფაკულტეტზე ზოგადი ფიზიკის კათედრის გამგედ (1986-95), თეორიული ფიზიკის კათედრის გამგედ (1995-2006), უნივერსიტეტის პრორექტორად სამეცნიერო მუშაობის დარგში (1993-2005).

ა.ხელაშვილის სამეცნიერო ინტერესების სფერო მოიცავს კვანტურ ქრომოდინამიკას, ელექტროსუსტი ურთიერთქმედებების სტანდარტულ მოდელს, მრავალი ნაწილაკის ამოცანების, გაფანტვის თეორიის და შედგენილი სისტემების ფიზიკის საკვანძო თეორიულ საკითხებს, არაწრფივი მოვლენების თეორიას და ველის კვანტური თეორიის ტოპოლოგიურ მოდელებს, სიმეტრიათა თეორიას. იგი ავტორია 120-მდე სამეცნიერო ნაშრომისა, ეკუთვნის რამდენიმე სახელმძღვანელო და მონოგრაფია.

პროფ. ა.ხელაშვილი არის პეტრე მელიქიშვილის სახელობის სამეცნიერო პრემიის ლაურეატი, დაჯილდობულია ღირსების ორდენით.

2007 წლიდან უნივერსიტეტში მუშაობს კონტრაქტით სრული პროფესორის რანგში.


9 14'04