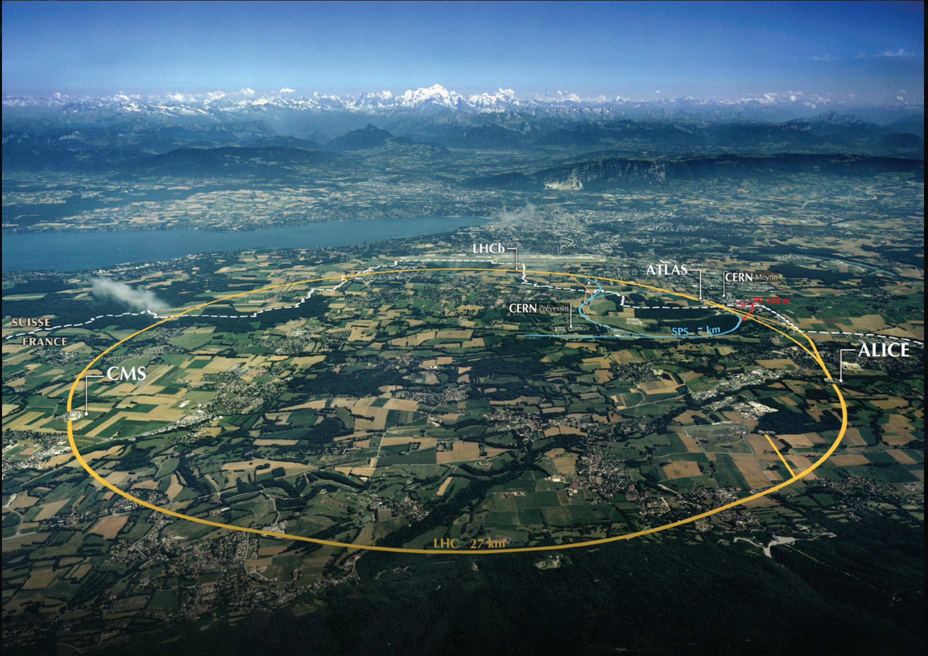
ანზორ ხელაშვილი

თანამედროვე ფიზიკის საფუძვლები



ნაწილი II

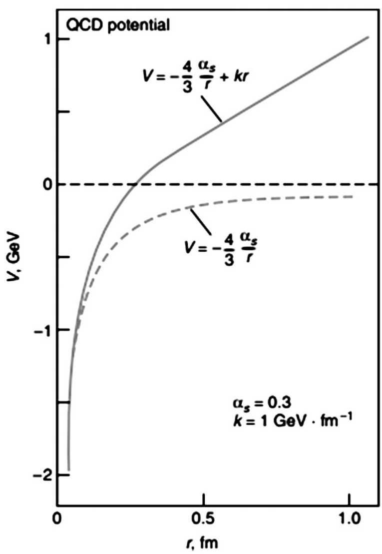
ანზორ ხელაშვილი

თანამედროვე ფიზიკის საფუძვლები, ნაწ. II

ANZOR KHELASHVILI

FOUNDATIONS OF MODERN PHYSICS

VOL. II. *MATHEMATICAL PROBLEMS OF QUANTUM MECHANICS*



TBILISI 2022

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ნ. ამაღლობელის
სახელობის მაღალი ენერგიების ფიზიკის ინსტიტუტი

ანზორ ხელაშვილი

თანამედროვე ფიზიკის საფუძვლები

ნაწილი II. *კვანტური მექანიკის მათემატიკური კონტრასტები.*

მაგისტრანტების და დოქტორანტებისათვის
ფიზიკის სპეციალობით

ეძღვნება ჩემი მასწავლებლების
ნათელ ხსოვნას

თბილისი 2022

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს მეორე ნაწილს კურსისა **„თანამედროვე ფიზიკის საფუძვლები“**. პირველი ნაწილი ეხებოდა ფარდობითობის სპეციალური და ზოგადი თეორიების სწავლებას ზოგადი ფიზიკის კურსში. ახლა ყურადღება გადაგვაქვს მე-20 საუკუნის კიდევ ერთ ფუნდამენტურ მოძღვრებაზე – კვანტურ მექანიკაზე. თუკი პირველი ნაწილი განკუთვნილი იყო დამწყები სტუდენტისათვის, მეორე ნაწილი, პირიქით, განეკუთვნება უფროსი კურსის სტუდენტებს, მაგისტრანტებს და დოქტორანტებს, რომლებსაც უკვე გავლილი აქვთ კვანტური მექანიკის საბაკალავრო კურსი. ასეთი „ნახტომი“ განპირობებულია იმ გარემოებით, რომ არსებულ სახელმძღვანელოებში სრულიად ან თითქმის სრულიად არ ექცევა ყურადღება მათემატიკური ხასიათის მნიშვნელოვან სიახლეებს, რომელთა გარეშე შეუძლებელია კვანტური მექანიკის თანამედროვე საკითხებში ორიენტირება.

საქმე ის გახლავთ, რომ კვანტური მექანიკის ოპერატორთა დიდი ნაწილი არის ***შემოუსაზღვრელი ოპერატორი*** ჰილბერტის სივრცეში. მათთვის ჰილბერტის სივრცე არის უსასრულო განზომილების. ამის გამო თავს იჩენს ფაქიზი მათემატიკური ხასიათის მომენტები, რომლებითაც უსასრულო განზომილების სივრცეებში ფიზიკურად დაკვირვებადი სიდიდეების (დამზერადების) თვისებები ძირეულად განსხვავდება დამზერადებისგან სასრულო განზომილების სივრცეებში. ესაა განსხვავება ერმიტულ და თვითშეუღლებულ ოპერატორებს შორის, რაც ხშირად მეტად არსებითია.

წინამდებარე წიგნში მიქცეულია ყურადღება ფუნქციონალური ანალიზის სათანადო საკითხებზე და გარჩეულია მთელი რიგი პარადოქსებისა, რომლითაც ხასიათდება „ტრადიციული“ კვანტური მექანიკა.

წიგნი არ არის დაწერილი ტრადიციული სახელმძღვანელოს ფორმით, მასში თავმოყრილია საკმაოდ ფართო ხასიათის ინფორმაციული მასალა, ძირითადად, მათემატიკიდან.მიუხედავად ამისა, მაგისტრანტები და დოქტორანტები ბევრ საინტერესო პრობლემას გაეცნობიან ამ წიგნში.

წიგნი საინტერესო უნდა იყოს მათემატიკური ფიზიკის სფეროში მომუშავე მეცნიერი თანამშრომლებისათვისაც და რაც მთავარია, ხელს შეუწყობს თეორიული ფიზიკის და ფუნქციონალური ანალიზის პარალელურ შესწავლას.

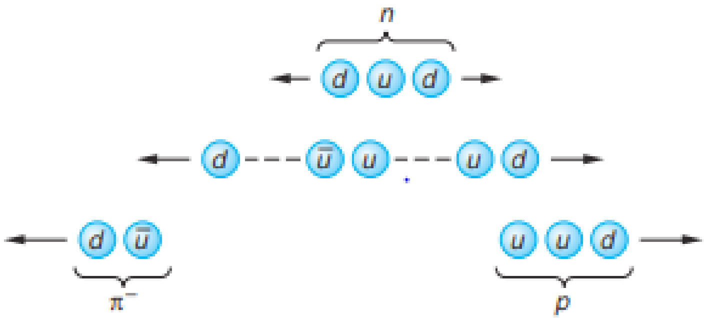
წიგნში მათემატიკური ხასიათის დამხმარე მასალა გადმოცემულია წვრილი შრიფტით.

ავტორი სიამოვნებით მიიღებს ყველა საქმიან შენიშვნას წიგნის შინაარსის და გამოყენებული მეთოდიკის თაობაზე.

დაკაბადონება და ყდის დიზაინი: გიორგი ბაგრატიონი

გამომცემლობა „ნეკერი“, 2022

ISBN 978-9941-501-31-9



წინასიტყვაობა

კვანტური მექანიკის წარმოშობა და განვითარება მე-20 საუკუნის 20-იან წლებში იყო უდიდესი წინსვლა ფიზიკურ მეცნიერებაში ისააკ ნიუტონის მოძღვრების შემდეგ. კვანტური მექანიკის იდეებმა მოგვცეს განსაკუთრებული ძვრები კაცობრიობის ჩვეულებრივ აზროვნებაში. კვანტური მექანიკა არის არსებითი მოძღვრება თანამედროვე ატომურ, მოლეკულურ, ბირთვულ და ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში, აგრეთვე ქიმიასა და კონდენსირებული გარემოს ფიზიკაში.

არსებობს კვანტური მექანიკის უამრავი სახელმძღვანელო, თვით დირაკის [Dirac P.A.M.Dirac, "The Principles of Quantum mechanics" 4^{th} edn(Oxford: Oxford Univ. Press., 1958) და შიფის Schiff L, "Quantum Mechanics" (McGraw-Hill, New Zrvrebis York, 3^{nd} ed, 1965] ცნობილი წიგნების ჩათვლით, ქართულ ენაზე არის ერთადერთი სახელმძღვანელო (ი. ვაშაკიძე, ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი, „კვანტური მექანიკა", თსუ გამომც. თბილისი, 1959, 1978), რომლებითაც კვანტური მექანიკა ისწავლა ფიზიკოსთა არაერთმა თაობამ. დღეს იგრძნობა, რომ ვერც ერთი არსებული სახელმძღვანელო ვერ აკმაყოფილებს კვანტური მექანიკის თანამედროვე მოთხოვნებს, რადგან უკანასკნელ პერიოდში კვანტურმა მექანიკამ განიცადა საგრძნობი პროგრესი და მისი არ გათვალისწინება სახელმძღვანელოებში უბრალოდ ხელსაც კი უშლის ახალგაზრდას გაერკვეს საგნის თანამედროვე პრობლემებში. მაგალითად, სახელმძღვანელოებ-

ში გადმოცემული კვანტური მექანიკის მათემატიკური აპარატი ჩამოყალიბებულია ჰილბერტის *სასრულო განზომილების* მქონე სივრცეებში, მაშინ როცა კვანტური მექანიკა ხშირად გამოიყენებს უსასრულო განზომილების სივრცეებს. ასეთ სივრცეებში ბევრი შედეგი იმეორებს სასრულ-განზომილებიანი სივრცეებისთვის დამახასიათებელ შედეგებს, მაგრამ არის არსებითი განსხვავებებიც, რომელთა გაუთვალისწინებლობას შეუძლია მიგვიყვანოს აბსურდულ დასკვნებამდე. დასაწყისისათვის მოვიყვანოთ ერთი კარგად ცნობილი მაგალითი: თურმე ყველა ოპერატორს არ გააჩნია შპური – დიაგონალური ელემენტების ჯამი მატრიცულ წარმოდგენაში. ასეთია ერთეულოვანი ოპერატორი, I. მისი შპური უდრის $\sum_i 1$, რაც არის ჰილბერტის სივრცის განზომილება, რომელიც უსასრულოა უსასრულო განზომილების სივრცეში. კერძოდ შევნიშნოთ, რომ თუ სასრულო-განზომილების სივრცეში კოორდინატის Q და იმპულსის P ოპერატორები აკმაყოფილებენ $[Q,P]=i\hbar 1$ კომუტაციის თანაფარდობას, მისი შპურის გამოთვლა გვაძლევს წინააღმდეგობრივ შედეგს $0=i\hbar Tr1$, ამიტომ კომუტაციის თანაფარდობის რეალიზაცია შესაძლებელია მხოლოდ უსასრულო განზომილების მქონე ჰილბერტის სივრცეში, სადაც შპური არ არსებობს. (უფრო დაწვრილებით ეს საკითხი განხილული გვექნება ქვემოთ). კიდევ ერთ თვისებას მივაქცევთ ყურადღებას: ამავე კომუტაციის თანაფარდობიდან გამომდინარეობს თანაფარდობა $PQ^n-Q^nP=-inQ^{n-1}$, (მტკიცდება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით), საიდანაც მიიღება უტოლობა (ამ ფაქტის შესახებ პირველად მიუთითა ვინტნერმა 1947 წელს)

$$n\left\|Q^{n-1}\right\|\le 2\left\|P\right\|\cdot\left\|Q\right\|^n,$$

ე.ი. $2\left\|P\right\|\cdot\left\|Q\right\|\ge n$ ყველა n-ისთვის, მათ შორის უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობებისთვის. ეს კი ეწინააღმდეგება ოპერატორთა შემოსაზღვრულობას. ამიტომ, ან P, ან Q, ან ორივე ოპერატორი უნდა იყოს შემოუსაზღვრელი, ანუ შეუძლებელია მათ შესახებ მსჯელობა, თუ არ ვიზრუნებთ მათი

განსაზღვრის არეებზე (იხ. ქვემოთ). ტერმინები „ერმიტული“ და „თვითშეუღლებული“ განსხვავდება ერთმანეთისგან შემოუსაზღვრელი ოპერატორებისათვის, მაშინ, როცა ერთმანეთს თანხვდებიან მატრიცებისთვის, ან ზოგადად, შემოსაზღვრული ოპერატორებისათვის. მხოლოდ თვითშეუღლებული ოპერატორებისთვის არის ძალაში კორექტული ფიზიკური შინაარსის მქონე სპექტრალური თეორემები.

ცნობილია, რომ ფიზიკა და მათემატიკა არიან მჭიდროდ დაკავშირებული დისციპლინები. ახალი შედეგები ფიზიკაში ხშირად იწვევენ მათემატიკის ახალი განშტოებების წარმოქმნას, ხოლო მათემატიკის ახალი კონცეფციები ჰპოვებს გამოყენებას ფიზიკაში. კვანტური მექანიკა ასრულებს ფუნდამენტურ როლს თანამედროვე ფიზიკის თითქმის ყველა სფეროში. ანალოგიურ როლს მათემატიკაში ასრულებს ფუნქციონალური ანალიზი. თუმცა შესაძლებელია კვანტური მექანიკის ძირითადი საფუძვლების შესწავლა წრფივი ალგებრის მეშვეობით, უფრო ღრმა გააზრება შეუძლებელია ფუნქციონალური ანალიზის ელემენტების გარეშე. უნდა აღინიშნოს, რომ ამის გამო კვანტური მექანიკა და ფუნქციონალური ანალიზი, როგორც მათემატიკური ფიზიკის საფუძველი, მე-20 საუკუნის დასაწყისიდან ვითარდებოდნენ თითქმის ერთმანეთის პარალელურად. მიგვაჩნია, რომ თანამედროვე მათემატიკური ფიზიკის მიღწევების გათვალისწინება კვანტური მექანიკის გაძლიერებული კურსის შესწავლის პროცესში აუცილებლობით არის გამოწვეული. განსაკუთრებით ეს ეხება სწავლებას მაგისტრატურასა და დოქტორანტურაში მას შემდეგ, რაც ახალგაზრდამ გაიარა კვანტური მექანიკის ტრადიციული კურსი ბაკალავრიატში სწავლების პერიოდში, რომელშიც შედარებით შერბილებულია მათემატიკური სიმკაცრე. სწორედ ამ მიზანს ემსახურება წინამდებარე მოკლე მონოგრაფია.

მონოგრაფია აგებულია შემდეგი სტრუქტურის მიხედვით: პირველ რიგში მოყვანილია ის ძირითადი და კარგად ცნობილი პარადოქსები, რომლებსაც ადგილი აქვს კვანტური მექანიკის ტრადიციული ფორმულირებისას. ნაჩვენებია პარადოქსების

წარმოქმნის არსი, ხოლო, ყოველივე ამის შემდეგ მიქცეულია ყურადღება მათი წარმოშობის მიზეზებზე. ამის შემდეგ განიხილება ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც მოეთხოვება კვანტური მექანიკის ოპერატორებს სისტემის სპექტრალური კანონზომიერებების აღწერისათვის, როგორიცაა: ერმიტულობა, თვითშეუღლებულობა, განსხვავება მათ შორის, ოპერატორთა განსაზღვრის არეები (რასაც ჩვენ მოკლედ დომენებს - *Domains* ვუწოდებთ), ყურადღებას ვაქცევთ დომენების როლს შემოუსაზღვრელი ოპერატორებისათვის. მოგვყავს ზოგიერთი საჭირო თეორემები (ხშირად, დამტკიცების გარეშე, მაგრამ დეტალური განმარტებებით). ყოველივე ამის შემდეგ ვუბრუნდებით თავიდან მოყვანილ პარადოქსებს და ვცდილობთ მათ ახსნას. მნიშველოვანი ადგილი უკავია ოპერატორის თვითშეუღლებული გაფართოების ცნების გამოყენებას მთელი რიგი ფიზიკური ამოცანების გასაანალიზებლად. ნაჩვენები გვაქვს თვითშეუღლებული გაფართოების პრაქტიკული მიდგომების (ე.წ. პრაგმატული მიდგომის) სიმძლავრე რიგ ფიზიკური ამოცანებში. მასალა ილუსტრირებულია უამრავი მაგალითით, რომელთა ნაწილი ამოხსნილია, ნაწილი კი მიეცემა მკითხველს ამოსახსნელად.

ვთვლით, რომ მონოგრაფია გამოდგება კვანტური მექანიკის *წინმსწრები კურსის* შესასწავლად, აგრეთვე სალექციოდ და სადიპლომო სამუშაოთა დასამუშავებლად.

ქვემოთ გადმოცემული გვექნება ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი თემა, რომელიც არსებითია ფიზიკისათვის და, სამწუხაროდ, ნაკლებად ცნობილია ფიზიკოსებისთვის.

ცნობილ საბჭოთა მათემატიკოსს მარკ კრეინს, მას შემდეგ, რაც გაეცნო პ. დირაკის კვანტური მექანიკის კურსს, ნახევრად ხუმრობით აღუნიშნავს, რომ ***„ფიზიკოსები ოპერატორებს ყასბებივით ექცევიანო“.***

სარჩევი

შესავალი

დამზერადი სიდიდეები კვანტურ მექანიკაში, როგორც წესი, წარმოიდგინება *ერმიტული* ოპერატორებით (ან მატრიცებით). ერმიტულ მატრიცებს ახასიათებთ მეტადრე მნიშვნელოვანი თვისებები, როგორიცაა ნამდვილი საკუთარი მნიშვნელობები, სათანადო საკუთარი ვექტორები კი ორთოგონალურია და მოჭიმავენ *მთელ* სასრულ-განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეს, და ა.შ. მაგრამ, ყველა ეს თვისება, საზოგადოდ, არ არის უზრუნველყოფილი უსასრულო განზომილების ჰილბერტის სივრცეებში. ერმიტულობის პირობა ხშირად იცვლება *სიმეტრიულობის* პირობით, რომელიც უზრუნველყოფს მხოლოდ დამზერადთა *ნამდვილობას*, მაშინ, როცა ყველა დანარჩენი თვისება მიიღწევა უფრო ფაქიზი პირობის – თვითშეუღლებულობის მოთხოვნით.

როგორც დავინახავთ წინამდებარე წიგნში, განსხვავება მათემატიკურ განმარტებაში თვითშეუღლებულობასა და ერმიტულობას შორის თეორიას მნიშვნელოვან პრობლემებს უქმნის.

კვანტური დამზერადების მიკუთვნება *ერმიტულ ოპერატორებთან* რჩება ფიზიკურად კარგად დასაბუთებული საფუძველი ნებისმიერი ფიზიკოსისათვის. უფრო იშვიათად აღინიშნება ხოლმე, რომ დამზერადები სინამდვილეში არიან *თვითშეუღლებული* და არა უბრალოდ ერმიტული ოპერატორები, და, რომ ეს ორი კონცეფცია – ერმიტულობა და თვითშეუღლებულობა სხვადასხვაა, მაგრამ ხშირად გამოიყენება სრულიად შემთხვევით, როგორც ერთიდაიგივე. ქვემოთ განვიხილავთ თვითშეუღლებულობის კონცეფციის აუცილებლობას ჩვეულებრივი კვანტური დამზერადებისთვის, როგორებიც არიან მდებარეობის ოპერატორი x, იმპულსის ოპერატორი $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$, კინეტიკური ენერგიის ოპერატორი $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$, შრედინგერის ოპერატორი,

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$, და ა.შ. ჩვენ არ განვიხილავთ ისეთ ოპერატორებს, რომლებიც წარმოიდგინება კომპლექსურ C^n სივრცეში მოქმედი $n\times n$ მატრიცებით, $n\in N$, რადგან მათთვის ერმიტულობის მოთხოვნა ტოლფასია თვითშეუღლებულობისა და განიხილება ტრადიციულ სახელმძღვანელოებში. ქვემოთ, პირველ რიგში, გადმოვცემთ კვანტური მექანიკის ტრადიციული ფორმულირების მთავარ კონცეფციებს, რომლებიც გვხვდება სახელმძღვანელოებში, ხოლო შემდეგ განვიხილავთ მათგან გამომდინარე ზოგიერთ პარადოქსულ შედეგს.

კვანტური მექანიკის პოსტულატები

არსებობს ძირითადად სამი კარგად დადგენილი ფორმულირება კვანტური მექანიკისა: 1. *ჰაიზენბერგის მატრიცული მექანიკა* (ისტორიულად, პირველი, მაგრამ ნაკლებად პრაქტიკული ფიზიკური გამოყენებისათვის); 2. *შრედინგერის ტალღური მექანიკა* (სტანდარტული და ყველაზე მეტად გამოყენებადი); 3. *ფეინმანის წირითი ინტეგრალი* (ყველაზე გამოყენებადი რელატივისტური კვანტური ველების თეორიაში). პირველი ორი ფორმულირება, განსაკუთრებით ტალღური მექანიკა, გადმოცემულია ყველა ცნობილ სახელმძღვანელოში, რაც შეეხება მესამე ფორმულირებას, არსებობს მრავალი სპეციალური ლიტერატურა, მათ შორის, ქართულ ენაზეც. მხედველობაში გვაქვს წიგნი: ა.ხელაშვილი, *„ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება“*, გამომც. „ნეკერი“, თბ. 2008.

სინამდვილეში, არსებობს სულ მცირე **ცხრა** დამოუკიდებელი გზა არარელატივისტური კვანტური მექანიკის ფორმულირებისა (D.F. Styer et al. Am. J. Phys.70(3), 2002). საზოგადოდ, დაკვანტვის პროცედურა კვანტური თეორიის ასაგებად მოცემული კლასიკური სისტემისათვის არ არის ცალსახა და

მკაცრი მიდგომა ჯერ არც არის განვითარებული (H.J. Groenewold. “On the principles of elementary quantum mechanics “, Physica 12 (1946), 405-460; N.N.Bogoliubov, A.A.Logunov, A.I.Oksak I.T. Todorov –“Introduction to axiomatic quantum field theory. MP monograph Series 18; 1975). მხოლოდ ორი რამ მოითხოვება ამ პროცედურისათვის. *ერთი* – კვანტური თეორია უნდა დაემთხვეს კლასიკური თეორიის შედეგებს ფორმალურ $\hbar \to 0$ ზღვარში. ესაა „შესაბამისობის პრინციპის“ შინაარსი. *მეორე* – ნაწინასწარმეტყველევი შედეგები უნდა იყვნენ თანხმობაში ექსპერიმენტებთან. უმარტივესი სისტემების (თავისუფალი ნაწილაკი, ჰარმონიული ოსცილატორი და არარელატივისტური ნაწილაკი რაიმე პოტენციალურ ველებში) დაკვანტვა გამოიყენება თანმიმდევრული ზოგადი ოპერატორული დაკვანტვის სქემის შესამუშავებლად ნებისმიერი სისტემისათვის კანონიკური ჰამილტონიანით. ასეთ სქემას უწოდებენ *კანონიკურ* დაკვანტვას, რომლის პოსტულატებია:

1. მოცემული ფიზიკური სისტემისათვის ვუშვებთ კლასიკური მექანიკის ჰამილტონისეულ ფორმულირებას. სისტემის მდგომარეობანი არიან წერტილები ლუწი განზომილების ფაზურ სივრცეში $\mathscr{P} = (a,b) \times \mathscr{R}$, რომელიც „დანომრილია“ განზოგადებული კანონიკური კოორდინატებით q_a და იმპულსებით p_a, $a = 1,...,n$, სადაც n არის თავისუფლების ხარისხთა რაოდენობა.

2. სისტემის ევოლუციას მართავენ ჰამილტონის მოძრაობის განტოლებები $\dot{q}_a = \{q_a, H\}$, $\dot{p}_a = \{p_a, H\}$ (1)

სადაც $H = H(q,p)$ არის სისტემის ჰამილტონიანი და $\{,\}$ არის კანონიკური პუასონის ფრჩხილი, რომელიც ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის f და g ფაზურ სივრცეში განიმარტება ასე

$$\{f,g\} = \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a} \right) \quad (2)$$

გვაქვს ე.წ. ფუნდამენტური პუასონის ფრჩხილები: $\{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0$ და $\{q_a, p_b\} = \delta_{ab}$. კლასიკური დამზერადები $\mathscr{P} = (a,b) \times \mathscr{R}$ არიან ლოკალური ფიზიკური სიდიდეები,

რომლებიც აღიწერებიან ფაზური ცვლადების ნამდვილი ფუნქციებით და ადგენენ ასოციატიურ კომუტატიურ ალგებრას.

3. კვანტური მექანიკის მდგომარეობები განმარტებულია როგორც ვექტორები ψ სათანადო ე.წ. სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში $\mathcal{H}$. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი აღინიშნება, როგორც $\left(\psi_1,\psi_2\right)$, ან $\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle$. თუ დაშვებულია, რომ ნებისმიერი მდგომარეობა $\psi\in\mathcal{H}$ შეიძლება რეალიზდეს ფიზიკურად და სრულდება სუპერპოზიციის პრინციპი, მაშინ მდგომარეობა $\psi=a_1\psi_1+a_2\psi_2$, სადაც $a_1,a_2\in\mathcal{C}$, არის აგრეთვე რეალიზებადი.

4. ყოველ კლასიკურ დამზერადს $f=f\left(x,p\right)$ ცალსახად მიეწერება წრფივი თვითშეუღლებული ოპერატორი $\hat{f}$, რომელიც მოქმედებს ჰილბერტის სივრცეში $\mathcal{H}$. ამ ოპერატორს ეწოდება *კვანტური* ***დამზერადი.*** ითვლება, რომ $\hat{f}$ არის კარგად განმარტებული (მკაცრად ეს ხდება სასრულ-განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეებში და, აგრეთვე, შემოსაზღვრული ოპერატორებისთვის უსასრულო განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეში). თუ ასეა, $\hat{f}$ ოპერატორი ცალსახად განისაზღვრება მატრიცული ელემენტებით $\left\langle\psi_1,\hat{f}\psi_2\right\rangle$. $\forall\psi_1,\psi_2$, ე.ი. მისი მატრიცით $f_{mn}=\left\langle e_m,\hat{f}e_n\right\rangle$ $\mathcal{H}$ -ის რაიმე ორთოგონალურ ბაზისში $\left\{e_n\right\}_1^\infty$. ყველა ასეთი ოპერატორისთვის შეგვიძლია შემოვიტანოთ მისი შეუღლებული $\hat{f}^+$ ასე (განსხვავებით კომპლექსური შეუღლებისგან მას უწოდებენ *ერმიტულ შეუღლებას,* ხშირად *ჰილბერტულად* შეუღლებასაც)

$$\left(\psi_1,f^+\psi_2\right)=\left(\hat{f}\ \psi_1,\psi_2\right),\qquad\forall\psi_1,\psi_2\in\mathcal{H}\quad(3)$$

და ამიტომ, ინვოლუცია (შეუღლება) $\hat{f}\rightarrow\hat{f}^+$ განიმარტება ოპერატორთა ალგებრაში თვისებებით

$\left(\hat{f}^+\right)^+=\hat{f},\ \left(a\hat{f}\right)^+=\overline{a}\hat{f}^+$, თავზე ხაზი ნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებას,

$$\left(f+g\right)^+=f^++g^+\quad(4)$$

ოპერატორი $\hat{f}$ არის *თვითშეუღლებული,* თუ $\hat{f}=\hat{f}^+$, ანუ

თუ

$$\left(\hat{f}\psi_1,\psi_2\right)=\left(\psi_1,\hat{f}\psi_2\right),\qquad \forall\,\psi_1,\psi_2\in\mathscr{H}\quad(5)$$

ნებისმიერი $\hat{f}$ კვანტური დამზერადის საშუალო მნიშვნელობა (მოლოდინი) $\left\langle\hat{f}\right\rangle_\psi$ ψ მდგომარეობაში და მისი დისპერსია Δf განიმარტება როგორც

$$\left\langle\hat{f}\right\rangle_\psi=\frac{\left(\psi,\hat{f}\psi\right)}{\left(\psi,\psi\right)},\quad \Delta\hat{f}=\sqrt{\left\langle\hat{f}^2\right\rangle_\psi-\left\langle\hat{f}\right\rangle_\psi^2}\quad(6)$$

დამზერადები არიან თვითშეუღლებული ოპერატორები, რადგან სათანადო საკუთარი მნიშვნელობები უნდა იყვნენ ნამდვილი და საკუთარი ვექტორები ადგენდნენ ორთოგონალურ ბაზისს $\mathscr{H}$ -ში. სპექტრი შეიცავს ყველა შესაძლო გაზომვებს, ხოლო სრული ორთონორმირებული ერთობლიობა საკუთარი მდგომარეობებისა განსაზღვრავენ გაზომვების ალბათობრივ ინტერპრეტაციას.

5. შესაბამისობის პრინციპი ნიშნავს კავშირს კლასიკური დამზერადების პუასონის ფრჩხილებსა და კვანტური დამზერადების კომუტატორებს შორის. სახელდობრ,

$$\left\{f_1,f_2\right\}\to\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{f}_1,\hat{f}_2\right]+O\left(\hbar\right)\quad(7)$$

მდებარეობის ოპერატორი $\hat{q}$ და იმპულსის ოპერატორი $\hat{p}$ არიან თვითშეუღლებული და აკმაყოფილებენ კანონიკურ კომუტაციის თანაფარდობებს

$$\left[\hat{q}_a,\hat{q}_b\right]=\left[\hat{p}_a,\hat{p}_b\right]=0,\qquad \left[\hat{q}_a,\hat{p}_b\right]=i\hbar\left\{q_a,p_b\right\}=i\hbar\delta_{ab}\quad(8)$$

შესაბამისობის პრინციპი ადგენს კვანტური დამზერადების ფორმას შემდეგი სახით $\hat{f}=f\left(\hat{x},\hat{p}\right)+\hat{O}\left(\hbar\right)$, სადაც $\hat{O}\left(\hbar\right)$ ისე აირჩევა, რომ უზრუნველჰყოს თვითშეუღლებულობა. რადგან $\hat{x}$ და $\hat{p}$ არ კომუტირებენ, მათი რიგითობის გამო, ეს გადასვლა არ არის ცალსახა.

კვანტურ მექანიკაზე გადასვლა ჰამილტონის ფორმალიზმში ხდება ოპერატორებზე გადასვლით:

$$H(x,p) \to H(\hat{x},\hat{p})$$

მაგრამ ეს წესი არ აკონკრეტებს თუ როგორ უნდა მოვექცეთ არაკომუტირებადი ოპერატორების , მაგ., $\hat{x}$ და $\hat{p}$ ნამრავლს. კლასიკურ ფიზიკაში ვიცით, რომ $xp = px$. ამიტომ მათ მიმდევრობას სხვადასხვა წევრებში არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს. კვანტურ მექანიკაში კი ოპერატორთა მიმდევრობა არსებითია და აპრიორულად არ არის ნათელი რა ეთანადება xp ნამრავლს კვანტურ მექანიკაში. ეს არის ოპერატორთა მოწესრიგების პრობლემა. სამწუხაროდ, არ არსებობს ცალცახად განსაზღვრული რეცეპტი, რომელიც გვეტყოდა რა რიგით უნდა დავსვათ ოპერატორები კვანტურ მექანიკაზე გადასვლისას. არსებობს სხვადასხვა წესი, რომელიც გამოიყენება ასეთ შემთხვევებში. ასეთია, მაგალითად, *ნორმალური მოწესრიგება*. ამ წესის თანახმად, კოორდინატისა და იმპულსის ნამრავლში იმპულსი უნდა იდგეს კოორდინატის წინ, ანუ

$$xp \xrightarrow{N.O.} \hat{p}\hat{x}$$

$$px \xrightarrow{N.O.} \hat{p}\hat{x}$$

$$x^2 p \xrightarrow{N.O.} \hat{p}\hat{x}^2$$

$$xpx \xrightarrow{N.O.} \hat{p}\hat{x}^2$$

და ა.შ.

გარდა ნორმალური მოწესრიგებისა, ყველაზე ხშირად გამოიყენება ე.წ. *ვეილის მოწესრიგება.* ამ შემთხვევაში ხდება სიმეტრიზაცია ყველა შესაძლო კომბინაციების მიხედვით ერთნაირი წონით, ე.ი.

$$xp \xrightarrow{W.O.} \frac{1}{2}\left(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\right)$$

$$px \xrightarrow{W.O.} \frac{1}{2}\left(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\right)$$

$$x^2 p \xrightarrow{W.O.} \frac{1}{3}\left(\hat{x}^2 \hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\right)$$

$$xpx \xrightarrow{W.O.} \frac{1}{3}\left(\hat{x}^2 \hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\right)$$

და ა.შ.

ზემოთ და შემდეგში $N.O.$ და $W.O.$ მიუთითებს ნორმალ-ურ/ვეილის მოწესრიგების გამოყენებაზე.

კვანტურ მექანიკაში ეს თანაფარდობები გაიგება უკვე სა-თანადო ოპერატორებისათვის. ნორმალური მოწესრიგებისას ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი კვანტური ჰამილ-ტონიანი H არის:

$$\left\langle x'\right|H^{N.O.}\left|x\right\rangle = \int dp\left\langle x'\right|p\right\rangle\left\langle p\right|H^{N.O.}\left|x\right\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p(x'-x)} H\left(\hat{x}, \hat{p}\right), \quad (9)$$

სადაც გამოყენებული გვაქვს იმპულსის ოპერატორის ბაზი-სის სისრულე,

$$\int dp\left|p\right\rangle\left\langle p\right| = 1$$

და განმარტებები. ამასთან ფურიე გარდაქმნას აქვს სახე:

$$\left(p, x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} = \overline{\left(\left\langle x\right|p\right\rangle\right)} \quad (10)$$

(თავზე ხაზი აღნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებულს)

ხოლო ვეილის წესით მოწესრიგებისას ჰამილტონიანის მა-ტრიცული ელემენტისათვის მიიღება (იხ. მაგ., ა. ხელაშვილი, „ფეინმანის ფუნქციონალური ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება", „ნეკერი", თბილისი, 2008):

$$\left(\left\langle x'\right|H^{W.O.}\left|x\right\rangle\right) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}p(x-x')} H\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) \quad (11)$$

ამრიგად, ვეილის წესით მოწერიგებული ჰამილტონიანის

მატრიცული ელემენტები გამოიხატებიან საშუალედო წერტილის მიწერით. ეს გარემოება განსაკუთრებით ფართოდ გამოიყენება კვანტური მექანიკის ფუნქციონალური ინტეგრალით ფორმულირებისას.

6. ნებისმიერი ორი კომუტირებადი დამზერადი შეიძლება ერთდროულად გაიზომოს, რადგან კომუტატივობა გულისხმობს საერთო საკუთარი ვექტორების არსებობას.

კომუტირებადი $\hat{f}_k$ დამზერადების მინიმალური რაოდენობა $k=1,2,...,N;\ \left[\hat{f}_k,\hat{f}_l\right]=0,\ \forall k,l$, რომელთა საერთო სპექტრი არის *გადაუგვარებელი,* განსაზღვრავს დამზერადთა სრულ სისტემას.

7. ნებისმიერი კვანტური $\psi\left(t\right)$ სისტემის დროში ევოლუცია იმართება შრედინგერის დროითი განტოლებით

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \quad (12)$$

და საწყისი პირობით $\psi\left(t_0\right)=\psi_0$, სადაც $\hat{H}$ ოპერატორი შეესაბამება კლასიკურ ჰამილტონიანს H. ამით ამოიწურება კანონიკური დაკვანტვის პოსტულატები, რომლებიც წარმოდგენილია კვანტური მექანიკის სახელმძღვანელოებში. ეს პოსტულატები იწვევს ზოგიერთ პარადოქსს, რომლებიც გარჩეული გვაქვს ქვემოთ.

ჯერ ვიხილავთ ნაწილაკის მოძრაობას წრფეზე, რომელიც $x\in\mathcal{R}$ ცვლადით არის პარამეტრიზებული. შემდეგ განვიხილავთ აგრეთვე უფრო რთულ შემთხვევებსაც, როგორიცაა: შემოსაზღვრული ინტერვალი, სამი ან მეტი განზომილება და ა. შ.

მათემატიკური ფორმალიზმი

მდგომარეობათა სივრცე

განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა წრფეზე $x \in \mathcal{R}$. გავრცელება შემოსაზღვრულ ინტერვალზე არ ქმნის რაიმე სიძნელეს.

ψ ტალღური ფუნქციის ალბათობრივი ინტერპრეტაციის გამო მოითხოვენ, რომ

$$\int_{\mathcal{R}} \left|\psi\left(x,t\right)\right|^2 dx = 1, \text{ ყველა } t \in \mathcal{R} \text{ -სთვის.}$$

ამიტომ, ტალღური ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად არის დამოკიდებული დროის t პარამეტრზე, უნდა იყოს კვადრატულად ინტეგრებადი სივრცული x ცვლადის მიხედვით:

$$\psi: \quad \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{C}$$

$$\left(x,t\right) \to \psi\left(x,t\right) \equiv \psi_t\left(x\right), \text{ თანაც } \psi_t \in L^2\left(\mathcal{R}, dx\right).$$

აქ, $L^2\left(\mathcal{R}, dx\right)$ არის კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების კლასი,

$$L^2\left(\mathcal{R}, dx\right) = \left\{ f : \mathcal{R} \to \mathcal{C} \,\middle|\, \int_{\mathcal{R}} dx \left|f\left(x\right)\right|^2 < \infty \right\},$$

სკალარული ნამრავლით

$$\left(f,g\right)_{L^2} = \int_{\mathcal{R}} dx \overline{f\left(x\right)} g\left(x\right), \quad f,g \in L^2\left(\mathcal{R}, dx\right) \quad (13)$$

ხაზი ფუნქციის თავზე აქაც აღნიშნავს ფუნქციის კომპლექსურ შეუღლებას.

შემდგომში ამ სივრცეს დავუკავშირებთ ფურიეს გარდაქმნათა ჰილბერტის სივრცეს $L^2\left(\mathcal{R}, dp\right)$ იმპულსზე დამოკიდებული ტალღური ფუნქციებისთვის

$$F: \; L^2\left(\mathcal{R}, dx\right) \to L^2\left(\mathcal{R}, dp\right)$$

$f \to Ff$, სადაც $\left(Ff\right)\left(p\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{\mathcal{R}} dxf\left(x\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)$ (14)

ოპერატორები მათი დომენები. განმარტებები

ჩვენ განვიხილავთ ნებისმიერ ჰილბერტის სივრცეს $\mathcal{H}$ და არა მარტო კონკრეტულ კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების სივრცეს.

განმარტება 1: ოპერატორი ჰილბერტის სივრცეში $\mathcal{H}$ არის წრფივი ასახვა

$$\begin{aligned} A: \quad & \mathcal{D}\left(A\right)\to\mathcal{H} \\ & \psi \to A\psi \end{aligned} \quad (15)$$

სადაც $\mathcal{D}\left(A\right)$ წარმოადგენს მკვრივ წრფივ ქვესივრცეს $\mathcal{H}$ -ში. ამ ქვესივრცეს ეწოდება A-*ს განსაზღვრის არე* (Domain)- ანუ, მოკლედ ***დომენი.***

(ამრიგად, მკაცრად რომ ვთქვათ, ჰილბერტის სივრცის ოპერატორია წყვილი $\left(A,\mathcal{D}\left(A\right)\right)$, რომელიც შედგება ჰილბერტის სივრცეში ოპერაციის მიკუთვნებით და ჰილბერტის სივრცის ქვესიმრავლით, რომელზეც ეს ოპერატორი მოქმედებს).

თუ B აღნიშნავს სხვა ოპერატორს $\mathcal{H}$ -ში (დომენით $\mathcal{D}\left(B\right)$), მაშინ ვიტყვით, რომ A ოპერატორი ტოლია B ოპერატორისა, თუ მათი მოქმედება და დომენი ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. თუ

$A\varphi = B\varphi$ და ყველა φ-სთვის $\mathcal{D}\left(A\right)=\mathcal{D}\left(B\right)$

ამ დროს ვწერთ, $A=B$.

როგორც არაერთხელ მივაქციეთ ყურადღება, *ოპერატორი არ არის უბრალოდ ფორმალური მოქმედება, არამედ ორი ოპერატორი, განსხვავებული დომენებით განიხილება, როგორც სხვადასხვა.*

დომენის სპეციფიკა ვლინდება A ოპერატორის შეუღლებული A^{+} ოპერატორის განმარტებისას

განმარტება 2:

A ოპერატორისთვის $\mathscr{H}$ -ში, შეუღლებული A^{+} ოპერატორის დომენი განიმარტება ასე

$$\mathscr{D}\left(A^{+}\right)=\left\{\varphi\in\mathscr{H}\middle|\exists\tilde{\varphi}\in\mathscr{H},\left\langle\varphi,A\psi\right\rangle=\left\langle\tilde{\varphi},\psi\right\rangle\right\} \text{ ყველა } \psi\in\mathscr{D}(A)\text{-სთვის,}$$

ამ დროს $\varphi\in\mathscr{D}\left(A^{+}\right)$-ისთვის, განვმარტეთ $A^{+}\varphi=\tilde{\varphi}$, ე.ი.

$$\left\langle\varphi,A\psi\right\rangle=\left\langle\tilde{\varphi},\psi\right\rangle=\left\langle A^{+}\varphi,\psi\right\rangle,\qquad \psi\in\mathscr{D}\left(A\right) \quad (16)$$

განვიხილოთ კვლავ ჰიბერტის სივრცე $\mathscr{H}=L^{2}\left([0,1],dx\right)$ და იმპულსის ოპერატორი P დომენით

$$D\left(P\right)=\left\{\psi\in\mathscr{H}\middle|\psi'\in\mathscr{H}\ ;\psi\left(0\right)=0=\psi\left(1\right)\right\} \quad (17)$$

მოცემული განმარტების თანახმად, P^{+} ოპერატორის დომენი ასეთია

$$D\left(P^{+}\right)=\left\{\varphi\in\mathscr{H}\middle|\exists\tilde{\varphi}\in\mathscr{H}\middle|;\ \ \left\langle\varphi,P\psi\right\rangle=\left\langle\tilde{\varphi},\psi\right\rangle\right\};\ \ \psi\in D\left(P\right)$$

ხოლო ოპერატორული პრესკრიპცია განისაზღვრება თანაფარდობით

$\left\langle\varphi,P\psi\right\rangle=\left\langle P^{+}\varphi,\psi\right\rangle$, ყველა $\psi\in\mathscr{D}\left(P\right)$-ისთვის

ნაწილობითი ინტეგრაციით მივიღებთ

$$\int_{0}^{1}dx\left(\overline{\varphi}P\psi\right)+(\overline{i\hbar\frac{d\varphi}{dx}})\psi\left(x\right)=-i\hbar\left[\overline{\varphi(1)}\psi\left(1\right)-\overline{\varphi(0)}\psi\left(0\right)\right]=0,\ \ \psi\in\mathscr{D}\left(P\right) \quad (18)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ $\psi\in\mathscr{D}\left(P\right)$-ის მიერ დაკმაყოფილებული სასაზღვრო პირობა (17) უკვე საკმარისია ზედაპირული წევრის მოსპობისათვის, რაც ამტკიცებს, რომ P^{+} ისევე მოქმედებდეს, როგორც P. ანუ

$$P^{+}=-i\hbar\frac{d}{dx},\qquad \mathscr{D}\left(P^{+}\right)=\left\{\varphi\in\mathscr{H}\middle|\varphi'\in\mathscr{H}\middle|\right\} \quad (19)$$

ამრიგად, P^{+} ოპერატორის დომენი *უფრო დიდია*, ვიდრე P-სი: $\mathscr{D}\left(P\right)\subset\mathscr{D}\left(P^{+}\right)$, რადგან ის არ იზღუდება რაიმე დამატებითი პირობებით, როგორც $\mathscr{D}\left(P\right)$.

კვანტურ მექანიკაში ფიზიკურად დამზერადი სიდიდეები აღიწერებიან ჰილბერტის სივრცის ოპერატორებით, რომლებიც არიან თვითშეუღლებული. თუმცა ფიზიკის უამრავ სახემძღვანელოში თვითშეუღლებულის ცნება ერმიტულის სინონონიმად გამოიყენება, რომლებიც მოქმედებენ უსასრულო განზომილების ჰილბერტის სივრცეში. მათ შორის არსებული განსხვავება გავლენას ახდენს ფიზიკაზე.

განმარტება 3:

A ოპერატორი $\mathcal{H}$ -ში არის ***ერმიტული****, თუ*

$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle$ *, ყველა* $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$*-სთვის*

ანუ $A^{+}\varphi = A\varphi$ *, ყველა* $\varphi \in \mathcal{D}(A)$*-სთვის.*

(სხვა სიტყვებით, A ოპერატორი ერმიტულია, თუ A^{+} მოქმედებს ისევე, როგორც A ყველა ვექტორზე, რომლებიც მიეკუთვნება $\mathcal{D}(A)$-ს, თუმცა სინამდვილეში A^{+} უნდა განისაზღვროს უფრო ფართო არეში, ვიდრე არის $\mathcal{D}(A)$)

A ოპერატორი $\mathcal{H}$ -ში არის ***თვითშეუღლებული****, თუ A და A^{+} თანხვდება ერთმანეთს $\left(A = A^{+}\right)$, ანუ, ცხადი სახით, თუ*

$A^{+}\varphi = A\varphi$ *და* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^{+})$ *ყველა* $\varphi \in \mathcal{D}(A)$*-სთვის.* (20)

ამიტომ, ნებისმიერი თვითშეუღლებული ოპერატორი არის ერმიტული, მაგრამ ერმიტული ოპერატორისთვის არ არის სავალდებულო იყოს თვითშეუღლებული. ჩვენი წინა შედეგი გვიჩვენებს ამ უკანასკნელ ფაქტს. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ P და P^{+} ოპერატორები მოქმედებენ ერთნაირად, მაგრამ P^{+}-ის დომენი არის მკაცრად ფართო, ვიდრე P-სი: $\mathcal{D}(P) \subset \mathcal{D}(P^{+})$, ამასთან $D(P) \neq D(P^{+})$. აქედან გამომდინარეობს, რომ P ოპერატორი არის ერმიტული, მაგრამ არ არის თვითშეუღლებული: $P \neq P^{+}$.

შეიძლება გვინდოდეს გავარკვიოთ, რომ არის თუ არა შესაძლებელი დავახასიათოთ ერმიტული ოპერატორი ოდნავ *ზედმეტი* თვისებით, რათა ის გახდეს თვითშეუღლებული. ეს დამატებითი თვისება მჟღავნდება შემდეგი შედეგით, რომელიც

მტკიცდება მათემატიკურ წიგნებში. თუ ჰილბერტის სივრცის ოპერატორი A არის თვითშეუღლებული, მაშინ მისი სპექტრი არის ნამდვილი, ხოლო სხვადასხვა საკუთარი მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ვექტორები ურთიერთორთოგონალურია; გარდა ამისა, საკუთარი ვექტორები განზოგადებულ საკუთარ ვექტორებთან ერთად ქმნიან ვექტორთა *სრულ სისტემას ჰილ-ბერტის სივრცეში.*

ამ შედეგს არ აქვს ადგილი ოპერატორებისათვის, რომ-ლებიც მხოლოდ ერმიტულია. ეს ფაქტი დასტურდება ადრე განხილულიდან: ერმიტული ოპერატორი P არ უშვებს რაიმე საკუთარ ან განზოგადებულ ფუნქციებს და ამიტომ, არ არის თვითშეუღლებული.

აქედან გამომდინარე ვასკვნით, რომ *საკუთარი ფუნ-ქციების სრული სისტემის არსებობა ფუნდამენტური თვისე-ბაა დამზერადების ფიზიკური ინტერპრეტაციისთვის*. სას-წავლო წიგნებში ვკითხულობთ, რომ „ერმიტული ოპერატორი, რომლის ორთონორმირებული საკუთარი ვექტორები განსაზ-ღვრავენ ბაზისს ჰილბერტის სივრცეში, არიან *დამზერადი*" (იხ. მაგ., მესსიას წიგნი). ამ მიდგომის უკმარისობაზე გვექნება ქვემოთ საუბარი. ახლა კი შევნიშნოთ შემდეგი: ჰილბერტის სივრცის მოცემული ოპერატორისთვის ჩვეულებრივად მარ-ტივია ერმიტულობის გარკვევა (თუნდაც, ნაწილობრივი ინტე-გრაციით), ამასთან ერთად არსებობს მარტივი კრიტერიუმები თვითშეუღლებულობის შესამოწმებლად.

და, ბოლოს, დავუბრუნდეთ ოპერატორების სპექტრს, რომ-ლის მიხედვით ჩვენ შევამოწმებთ ზოგად იდეებს. განმარტების თანახმად, თვითშეუღლებული ოპერატორის სპექტრი ჰილ-ბერტის სივრცეში არის ნამდვილი რიცხვების ორი კრებულის გაერთიანება,

(1) ე.წ. *დისკრეტული ან წერტილოვანი სპექტრი*, ანუ A -ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც საკუთარი ვექტორები მიეკუთვნება A-ს განსაზღვრის დომენს და

(2) ე.წ. *უწყვეტი სპექტრი*, ე.ი. განზოგადებულ საკუთარ

მნიშვნელობათა სისტემა (ანუ A-ს საკუთარი მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც საკუთარი ვექტორები არ მიეკუთვნებიან ჰილბერტის სივრცეს $\mathscr{H}$).

შემდეგი ორი მაგალითი კარგად არის ცნობილი ფიზიკაში:

(1) წრფეზე მოძრავი ნაწილაკისთვის მდებარეობის და იმპულსის დამზერადები ორივე იღებს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობებს. ამიტომ შესაბამის ოპერატორებს აქვთ უწყვეტი და შემოუსაზღვრელი სპექტრი: $SpQ = \mathscr{R}$ და $SpP = \mathscr{R}$. მკაცრ მტკიცებას მოვიყვანთ ქვემოთ. Sp ნიშნავს სპექტრს!

(2) ერთეულოვან ინერვალში მოქცეული ნაწილაკი, რომელსაც ედება პერიოდული სასაზღვრო პირობები და მისი ტალღური ფუნქცია მიეკუთვნება ჰილბერტის სივრცეს $L^2\left(\left[0,1\right],dx\right)$, აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს $\psi\left(0\right)=\psi\left(1\right)$. ამ შემთხვევაში მდებარეობის ოპერატორს აქვს უწყვეტი და შემოსაზღვრული სპექტრი ინტერვალში$\left[0,1\right]$. იმპულსის ოპერატორის სპექტრი კი არის დისკრეტული და შემოუსაზღვრელი, რაც ნიშნავს, რომ იმპულსმა შეიძლება მიიღოს მხოლოდ რომელიმე დისკრეტული, თუმცა ნებისმიერად დიდი მნიშვნელობა.

კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციები წარმოადგენენ ე.წ. ჰილბერტის სივრცის ელემენტებს – ვექტორებს. ამიტომ მიზანშეწონილია პირველ რიგში გავეცნოთ ჰილბერტის სივრცეებს.

ჰილბერტის სივრცეები:

ჰილბერტის სივრცის კონცეფცია შემოიტანა ჰილბერტმა (~ 1910), როგორც სასრულო განზომილებიანი ევკლიდური $R^n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ სივრცის განზოგადება $n \to \infty$ ზღვარში. ის არის ვექტორული სივრცე.

წრფივი ვექტორული სივრცე

წრფივი ვექტორული სივრცე არის ელემენტების (ვექტორების) ერთობლიობა, რომელიც არის ჩაკეტილი შეკრების და სკალარზე გამრავლების მიმართ. ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ ϕ და ψ არიან ვექტორები, მაშინ ვექტორია აგრეთვე $a\phi + b\psi$, სადაც a და b არიან ნებისმიერი სკალარები. თუ სკალარები მიეკუთვნება კომპლექსური (ან ნამდვილი) რიცხვების ველებს, ვლაპარაკობთ კომპლექსურ (ნამდვილ) წრფივ ვექტორულ სივრცეებზე. ძალიან ბევრ წრფივ ვექტორულ სივრცეებს შორის ყველაზე მეტ ინტერესს ჩვენთვის წარმოადგენს ორი მათგანი:

1. *დისკრეტული ვექტორები,* რომლებიც წარმოიდგინებიან კომპლექსური რიცხვებისგან შედგენილი სვეტის სახით,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \quad (21)$$

ან სტრიქონის სახით: $\left(b_1, b_2, ...,\right)$

2. გარკვეული *ტიპის ფუნქციების სივრცეები,* მაგალითად, როგორიცაა, ყველა დიფერენცირებადი ფუნქციები.

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ეს მაგალითები აკმაყოფილებენ წრფივი ვექტორული სივრცეების განსაზღვრას.

ვექტორთა ერთობლიობას (სისტემას) $\left\{\phi_n\right\}$ ვუწოდებთ წრფივად დამოუკიდებელს, თუ მათი არც ერთი არატრივიალური წრფივი კომბინაცია იჯამება ნულისკან, ანუ თუ განტოლებიდან $\sum_n c_n \phi_n = 0$ გამომდინარეობს მხოლოდ, რომ ყველა $c_n = 0$. თუ ეს პირობა არ სრულდება, ერთობლიობა

წრფივად დამოკიდებულია, ამ დროს ერთობლიობის წევრი შეგვეძლება გამოვსახოთ სხვა წევრების წრფივი კომბინაციის სახით. წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალურ რაოდენობას ეწოდება ***სივრცის განზომილება,*** ხოლო წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალურ სისტემას ეწოდება სივრცის ***ბაზისი.*** ნებისმიერი ვექტორი ამ სივრცეში შეიძლება გამოისახოს ამ ბაზისური ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით.

ყოველ წყვილს ვექტორებისა წრფივ სივრცეში ეთანადება *შინაგანი ნამრავლი (ან სკალარული ნამრავლი),* (ψ,ϕ) რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

(a) (ψ,ϕ) არის კომპლექსური რიცხვი

(b) $(\phi,\psi)=\overline{(\psi,\phi)}$.

(c) $(\phi,c_1\psi_1+c_2\psi_2)=c_1(\phi,\psi_1)+c_2(\phi,\psi_2)$ (22)

(d) $(\phi,\phi)\geq 0$, ტოლობა მიიღება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\phi=0$

მეორე და მესამე თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(c_1\psi_1+c_2\psi_2,\phi)=\overline{c}_1(\psi_1,\phi)+\overline{c}_2(\psi_2,\phi)$$

ამიტომ ამბობენ, რომ შინაგანი ნამრავლი არის ***წრფივი*** თავისი მეორე არგუმენტით, და არის ***ანტიწრფივი*** თავისი პირველი არგუმენტით.

ზემოაღნიშნული ვექტორული სივრცეების შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი შინაგანი ნამრავლები:

(1) თუ ψ არის ვექტორ-სტრიქონი ელემენტებით $a_1,a_2,\ldots$, ხოლო ϕ არის ვექტორ-სვეტი ელემენტებით $b_1,b_2,\ldots$, მაშინ

$$(\phi,\psi)=\overline{a}_1b_1+\overline{a}_2b_2+\ldots$$

(2) თუ ψ და ϕ არიან x-ის ფუნქცები, მაშინ

$$(\psi,\phi)=\int\overline{\psi}(x)\phi(x)w(x)dx \quad (23)$$

სადაც $w(x)$ არის რაიმე არაუარყოფითი წონითი ფუნქცია.

შინაგანი ნამრავლი აზოგადებს სიგრძის და კუთხის ცნებებს ნებისმიერი სივრცეებისთვის. თუ ორი ვექტორის შინაგანი ნამრავლი ნულის ტოლია, ვიტყვით, რომ ვექტორები ორთოგონალურია. ვექტორის ნორმა (ანუ სიგრძე)

განისაზღვრება ასე $\|\phi\| = (\phi,\phi)^{1/2}$. გვაქვს ორი მნიშვნელოვანი თეორემა:

შვარცის უტოლობა, $\left|(\psi,\phi)\right|^2 \le \left|(\psi,\psi)\right|\left|(\phi,\phi)\right|$ (24)

სამკუთხედის უტოლობა, $\|(\psi+\phi)\| \le \|\psi\| + \|\phi\|$ (25)

ორივე შემთხვევაში ტოლობა მაშინ გვაქვს, როცა ვექტორი არის მეორეზე რიცხვითი გამრავლება, ანუ $\psi = c\phi$.

ვექტორთა $\{\phi_i\}$ სიმრავლე არის ორთონორმალური, თუ ვექტორები ურთიერთორთოგონალურია და აქვთ ერთის ტოლი ნორმა. მათი შინაგანი ნამრავლი აკმაყოფილებს პირობას $(\phi_i,\phi_j) = \delta_{ij}$. წრფივი ვექტორული V სივრცის შესაბამისად V -ზე არსებობს წრფივი ფუნქციონალების *დუალური სივრცე*. წრფივი ფუნქციონალი F ყოველ ϕ ვექტორს აკუთვნებს $F(\phi)$ სკალარს ისე, რომ

$$F(a\phi + b\psi) = aF(\phi) + bF(\phi) \quad (26)$$

ყველა ვექტორისათვის ϕ და ψ , და ნებისმიერი სკალარებისთვის, a და b .

წრფივი ფუნქციონალები თავისთავად შეიძლება ადგენდნენ წრფივ სივრცეს V' , თუ ჩვენ განვმარტავთ ორ ფუნქციონალს შემდეგნაირად

$$(F_1 + F_2)(\phi) = F_1(\phi) + F_2(\phi) \quad (27)$$

რიცზ-ის თეორემა: არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა V'-ში წრფივ F -ფუნქციონალებსა და f ვექტორებს შორის V -ში, ისეთი, რომ წრფივ ფუნქციონალებს აქვთ სახე

$F(\phi) = (f,\phi)$, (ფრჩხილებით აღნიშნულია შინაგანი ნამრავლი). (28)

სადაც f ფიქსირებული ვექტორია, ხოლო ϕ - ნებისმიერი ვექტორი. ამიტომ V და V' სივრცეები არსებითად იზომორფულია. ამჟამად ჩვენ მოვიყვანთ ამ თეორემის მტკიცებას, რომელიც არ ითვალისწინებს კრებადობის საკითხებს, რომლებიც წარმოიშვება უსასრულო განზომილების სივრცეში.

მტკიცება: ნათელია, რომ ნებისმიერი მოცემული f ვექტორი V -ში განსაზღვრავს წრფივ ფუნქციონალს ზემოთ მოყვანილი განმარტების მიხედვით. ამიტომ გვჭირდება დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი წრფივი F ფუნქციონალისთვის შევძლებთ ცალსახად ავაგოთ f ვექტორი, რომელიც დააკმაყო-

ფილებს (24)-ს. $\{\phi_n\}$ იყოს V-ში ორთონორმალური ბაზისური ვექტორები, $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$. ავიღოთ ნებისმიერი ვექტორი V-ში $\psi = \sum_n x_n \phi_n$. თანაფარდობიდან (22) ვწერთ

$$F(\psi) = \sum_n x_n F(\phi_n) \quad (29)$$

ავაგოთ ახლა შემდეგი ვექტორი

$$f = \sum_n \overline{\left[F(\phi_n)\right]}\, \phi_n \quad (30)$$

მისი შინაგანი ნამრავლი ნებისმიერ ψ ვექტორზე არის (იხ. 24)

$$(f, \psi) = \sum_n F(\phi_n) x_n = F(\psi) \quad (32)$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცდა.

დირაკის ბრა და კეტ აღნიშვნები

დირაკის აღნიშვნებით, რომელიც ძალიან პოპულარულია კვანტურ მექანიკაში, ვექტორებს V-სივრცეში ეწოდება **კეტ ვექტორები**, და აღინიშნება ასე $|\phi\rangle$, ხოლო წრფივ ფუნქციონალებს დუალურ V' სივრცეში ეწოდება **ბრა ვექტორები** და აღინიშნება ასე: $\langle F|$. ამრიგად, შემოგვაქვს **ბრა სივრცის** ცნება, როგორც ვექტორული სივრცისა კეტ ვექტორების სივრცის „დუალურ" სივრცეში. ბრა სივრცე მოჭიმულია საკუთარ ბრა-ვექტორებზე $\{\langle a'|\}$, რომლებიც შეესაბამება საკუთარ კეტებს $\{|a\rangle\}$

რიცზის თეორემის თანახმად, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ბრა და კეტ სივრცეებს შორის, რომელიც ფორმალურად ასე შეიძლება წარმოვიდგინოთ:

$$|\alpha\rangle \overset{DC}{\leftrightarrow} \langle\alpha|$$

სადაც DC მიუთითებს დუალურ შესაბამისობაზე (dual correspondence). უხეშად რომ ვთქვათ, ბრა სივრცე შეიძლება გავიგოთ, როგორც რაღაც სახის სარკული წარმოსახვა კეტ სივრცისა. $c|\alpha\rangle$-ს დუალური ბრა არის $\overline{c}\langle\alpha|$, და არა $c\langle\alpha|$. უფრო ზოგადად, გვაქვს

$$c_\alpha\left|\alpha\right\rangle+c_\beta\left|\beta\right\rangle\overset{DC}{\leftrightarrow}\bar{c}_\alpha\left\langle\alpha\right|+\bar{c}_\beta\left\langle\beta\right| \quad (33)$$

შემოვიტანოთ ბრა და კეტ ვექტორების შინაგანი ნამრავლი, $\left\langle\beta\middle|\alpha\right\rangle$. ამ ნამრავლში ბრა დგას მარცხნივ, ხოლო კეტ – მარჯვნივ,

$$\left\langle\beta\middle|\alpha\right\rangle=\left(\left\langle\beta\right|\right)\cdot\left(\left|\alpha\right\rangle\right) \quad (34)$$

ეს ნამრავლი, საზოგადოდ, არის კომპლექსური რიცხვი. შინაგანი ნამრავლის შედგენისას ერთი ვექტორი ყოველთვის აიღება ბრა სივრციდან, მეორე კი – კეტ სივრციდან.

უნდა აღინიშნოს, რომ რიცზის თეორემა ადგენს ანტიწრფივ დამოკიდებულებას ბრასა და კეტს შორის. თუ $\left\langle F\right|\leftrightarrow\left|F\right\rangle$, მაშინ

$$\bar{c}_1\left\langle F\right|+\bar{c}_2\left\langle F\right|\leftrightarrow c_1\left|F\right\rangle+c_2\left|F\right\rangle \quad (35)$$

სასურველია გვახსოვდეს, რომ უპირველესი განმარტება ბრა ვექტორისა არის როგორც წრფივი ფუნქციონალი კეტ ვექტორების სივრცეში. ჩვენ დაგვჭირდება უფრო ზოგადი სივრცეების განხილვა. დავინახავთ, რომ ურთიერთცალსახა კავშირი, რიცზის თეორემიდან გამომდინარე, აღარ შესრულდება ე.წ. „აღჭურვილ“ (Rigged, оснащенном) ჰილბერტის სივრცეებში (იხ. ქვემოთ).

წრფივი ოპერატორები

ვექტორულ სივრცეში ოპერატორს გადაყავს ვექტორები სხვა ვექტორებში; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ A არის ოპერატორი, ხოლო ψ - ვექტორი, მაშინ $A\psi$ არის სხვა ვექტორი. ოპერატორი მთლიანად განიმარტება თავისი მოქმედებით ყველა ვექტორზე მოცემულ სივრცეში (ან თავისი ქვესივრცით, *დომენით,* რომელშიც ოპერატორის მოქმედება კარგად არის განსაზღვრული). *წრფივი ოპერატორი* აკმაყოფილებს პირობას

$$A\left(c_1\psi_1+c_2\psi_2\right)=c_1\left(A\psi_1\right)+c_2\left(A\psi_2\right) \quad (36)$$

ორი ოპერატორის ტოლობა, $A=B$ ნიშნავს, რომ $A\psi=B\psi$ *ყველა* ვექტორისათვის ამ ოპერატორების *საერთო დომენში.*

ამავე დროს განიმარტება ოპერატორების ჯამი და ნამრავლი

$(A+B)\psi = A\psi + B\psi;$ $\quad AB\psi = A(B\psi)$, ასევე ყველა ψ -ისთვის. (37)

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ოპერატორთა ნამრავლი არის აუცილებლად *ასოციატიური,* $A(BC)=(AB)C$, მაგრამ არ არის აუცილებელი კომუტატორული იყოს.

მაგალითი 1.

დისკრეტული ვექტორების სივრცეში, სადაც ვექტორები წარმოიდგინება სვეტის სახით, წრფივი ოპერატორები არიან კვადრატული მატრიცები. მართლაც, ნებისმიერი ოპერატორული განტოლება N -განზომილებიან სივრცეში შეგვიძლია გადავაქციოთ მატრიცულ განტოლებად. განვიხილოთ, მაგალითად, ოპერატორული განტოლება

$$M\left|\psi\right\rangle = \left|\phi\right\rangle \quad (38)$$

ავირჩიოთ რაიმე ორთოგონალური ბაზისი $\{|u_1\rangle, i=1,2,...,N\}$, რომელშიც გავშალოთ ვექტორები,

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_j a_j \left|u_j\right\rangle, \qquad \left|\phi\right\rangle = \sum_k b_k \left|u_k\right\rangle \quad (39)$$

ვიმოქმედოთ ოპერატორულ განტოლებაზე მარცხნიდან $\langle u_i|$ -ით, მიიღება (თუ $|u_i\rangle$ ქმნიან სვეტს, მაშინ $\langle u_i|$, $\quad (j=1,2,...,N)$ ქმნიან სტრიქონს),

$$\sum_j \left\langle u_i \middle| M\, u_j \right\rangle a_j = \sum_k \left\langle u_i \middle| u_k \right\rangle b_k = b_i \quad (40)$$

ამას კი აქვს მატრიცული განტოლების სახე

$$\sum_j M_{ij} a_j = b_i, \qquad M_{ij} \equiv \left\langle u_i \middle| M \middle| u_j \right\rangle \quad (41)$$

ამ გზით ნებისმიერი პრობლემა N -განზომილებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეში გადაითარგმნება მატრიცულ პრობლემაში. სწორედ ეს ფაქტი მეტყველებს მატრიცული მექანიკის ეკვივალენტობაზე შრედინგერის ტალღურ მექანიკასთან.

იგივენაირად შეგვიძლია მოვიქცეთ უსასრულო-გან-

ზომილების ვექტორულ სივრცეში, თუკი იქ გვექნებოდა თვლადი ორთონორმალური ბაზისი, ოღონდ შევხვდებოდით უსასრულო ჯამის კრებადობის ამოცანას. ამ საკითხს შემდგომში დავუბრუნდებით.

მაგალითი 2.

ფუნქციების სივრცეში ოპერატორები ხშირად იღებენ დიფერენციალური ან ინტეგრალური ოპერატორების სახეს. მაგალითად, ასეთი ოპერატორული განტოლება

$$\frac{\partial}{\partial x}x = 1 + x\frac{\partial}{\partial x}$$

შეიძლება უცნაურად მოგვეჩვენოს, თუ დავივიწყებთ, რომ ოპერატორები განსაზღვრულია თავისი მოქმედებით ვექტორებზე. ამიტომ ზედა მაგალითი ასე უნდა გავიგოთ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x\psi\left(x\right)\right] = \psi\left(x\right) + x\frac{\partial\psi\left(x\right)}{\partial x}, \qquad \forall\,\psi\left(x\right) \quad (42)$$

შეგვიძლია განვსაზღვროთ ოპერატორები, რომლებიც მოქმედებენ *მარცხნივ* მიმართულებით ე.წ. ბრა – ვექტორებზე, როგორც:

$$\left(\langle\phi|A\right)|\psi\rangle = \langle\phi|\left(A|\psi\rangle\right), \qquad \forall\,\phi,\psi \quad (43)$$

ეს გამოიყურება ტრივიალურად დირაკის აღნიშვნებში. მიუხედავად ამისა, აზრი აქვს გავშიფროთ ეს თანაფარდობა უფრო დეტალურად.

ბრა ვექტორი ფაქტობრივად არის წრფივი ფუნქციონალი კეტ ვექტორების სივრცეზე, რომელიც დაწვრილებით აღინიშნება ასე:

$$F_\phi\left(\cdot\right) = \left(\phi,\cdot\right), \quad (44)$$

სადაც ϕ არის F_ϕ-ის შესაბამისი ვექტორი *რიცზის* თეორემის მიხედვით, და წერტილი აღნიშნავს ვექტორული არგუმენტის ადგილს.

შეგვიძლია განვმარტოთ A ოპერატორის მოქმედება ბრა

ფუნქციონალზე ასე

$$AF_{\phi}(\psi)=F_{\phi}(A\psi) \qquad \forall\psi \quad (45)$$

ამ თანაფარდობის მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს ψ ვექტორის წრფივი ფუნქციონალის განმარტებას და მართლაც განსაზღვრავს ახალ ფუნქციონალს, AF_{ϕ}. რიცზის თეორემის მიხედვით უნდა არსებობდეს ისეთი კეტ ვექტორი χ, რომ

$$AF_{\phi}(\psi)=(\chi,\psi)=F_{\chi}(\psi) \quad (46)$$

რადგან მოცემული A-სთვის χ ცალსახად განისაზღვრება ϕ-ით, უნდა არსებობდეს ოპერატორი $A^{\dagger}$ ისეთი, რომ $\chi=A^{\dagger}\phi$. ამიტომ წინა ფორმულას ვწერთ, როგორც

$$AF_{\phi}=F_{A^{\dagger}\phi}. \quad (47)$$

წინა ორი ფორმულიდან გვაქვს: $(\phi,A\psi)=(\chi,\psi)$, და ამიტომაც

$$\left(A^{\dagger}\phi,\psi\right)=(\phi,A\psi), \text{ ყველა } \phi \text{ და } \psi\text{-სათვის} \quad (48)$$

ეს კი არის A ოპერატორის შეუღლებულის, $A^{\dagger}$-ის ჩვეულებრივი განმარტება. მთელი ეს არატრივიალური მათემატიკა თავმოყრილია დირაკის (43) მარტივ განტოლებაში.

შეუღლებული ოპერატორი ფორმალურად განისაზღვრება დირაკის აღნიშვნებში იმის მოთხოვნით, რომ თუ $|\phi\rangle$ და $\langle\psi|$ არიან სათანადოდ კეტ და ბრა ვექტორები, მაშინ $\langle\phi|A^{\dagger}\equiv\langle\omega|$ და $A|\phi\rangle\equiv|\omega\rangle$ აგრეთვე შეესაბამებიან ბრას და კეტს. რადგან $\overline{\langle\omega|\psi\rangle}=\langle\psi|\omega\rangle$, გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{\langle\phi|A^{\dagger}|\psi\rangle}=\langle\psi|A|\phi\rangle, \qquad ,\forall\phi,\psi \quad (49)$$

ეს ეკვივალენტურია წინა თანაფარდობისა. თუმცა უფრო მარტივია, ვიდრე რიცზის თეორემით შემოყვანა, მაგრამ ეს ფორმალური მეთოდი აღარ არის სამართლიანი $A^{\dagger}$-ოპერატორის არსებობის დასამტკიცებლად.

გარე ნამრავლი

შეუღლებული ოპერატორის ზოგიერთი თვისება გამომდინარეობს პირდაპირ მისი განმარტებიდან:

$$(cA)^{\dagger}=\overline{c}A^{\dagger}; \qquad (A+B)^{\dagger}=A^{\dagger}+B^{\dagger}; \qquad (AB)^{\dagger}=B^{\dagger}A^{\dagger} \quad (50)$$

ბრა და კეტ ვექტორების შინაგან ნამრავლთან ერთად, $\langle\phi|\psi\rangle$, რომელიც არის სკალარი, შეიძლება განვმარტოთ გარე ნამრავლი, $|\psi\rangle\langle\phi|$. ეს ობიექტი არის ოპერატორი. მართლაც, ნამრავლის ასოციატურობის დაშვებით მივიღებთ

$$\left(|\psi\rangle\langle\phi|\right)|\lambda\rangle=|\psi\rangle\left(\langle\phi|\lambda\rangle\right) \quad (51)$$

და რადგან ოპერატორი განიმარტება მისი მოქმედების მითითებით ნებისმიერ ვექტორზე სხვა ვექტორის წარმოსაქმნელად, ეს განტოლება მთლიანად განმარტავს $|\psi\rangle\langle\phi|$-ს, როგორც ოპერატორს. მოყვანილი თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(|\psi\rangle\langle\phi|\right)^{\dagger}=|\phi\rangle\langle\psi|$$

ეს თანაფარდობა გვიბიძგებს, რომ დავწეროთ $\left(|\psi\rangle\right)^{\dagger}=\langle\psi|$. თუმცა რეალურად არავითარი ვნება არ არის ამ თანაფარდობაში, ის ვერ იქნება მისაღები, რადგან იყენებს „შეუღლების“ სიმბოლოს, $\dagger$, და ის არ არის ოპერატორი და არ შეუძლია დააკმაყოფილოს ფუნდამენტური განმარტება.

ოპერატორისთვის მნიშვნელოვანი მახასიათებელია მისი შპური

$$TrA=\sum_{j}\langle u_j|A|u_j\rangle \quad (52)$$

მატრიცის შპური არის მისი დიაგონალური ელემენტების ჯამი. ოპერატორისთვის უსასრულო განზომილების სივრცეში შპური არსებობს მხოლოდ მაშინ, თუ უსასრულო ჯამი კრებადია.

ერმიტული და თვითშეუღლებული ოპერატორები, თეორემები

ოპერატორს, რომელიც უდრის თავის შეუღლებულს, ეწოდება *თვითშეუღლებული,* რაც ნიშნავს შემდეგს:

$$\langle\phi|A|\psi\rangle=\overline{\langle\psi|A|\phi\rangle} \quad (53)$$

და A -ს დომენი ემთხვევა A^+ -ის დომენს, (ე.ი. ϕ ვექტორების კრებულს, რომელზეც $A\phi$ -ც არის კარგად განმარტებული) . თუ ოპერატორი მხოლოდ მოყვანილ ტოლობას აკმაყოფილებს, მას ეწოდება ***ერმიტული,*** ერმიტული მატრიცის ანალოგიურად, რომლისთვისაც $M_{ij}=\overline{M_{ij}}$. განსხვავება ერმიტ-ულ ოპერატორებსა და თვითშეუღლებულ ოპერატორებს შორის არსებითია მხოლოდ უსასრულო განზომილების ვექტორულ სივრცეებში. ერმიტულ ოპ-ერატორებს მათემატიკაში ხშირად „სიმეტრიულსაც" უწოდებენ. მოვიყვა-ნოთ რამდენიმე თეორემა ერმიტული ოპერატორისათვის.

თეორემა 1.

თუ $\langle\psi|A|\psi\rangle=\overline{\langle\psi|A|\psi\rangle}$,ყველა $|\psi\rangle$ -სთვის,მაშინ $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle=\overline{\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle}$ და ამიტომ, $A=A^+$, სადაც ავიღეთ $|\psi\rangle=a|\phi_1\rangle+b|\phi_2\rangle,\qquad \forall a,b,\phi_1,\phi_2$ -სთვის

მტკიცება: გავწეროთ პირობა ცხადი სახით:

$$\begin{aligned}\langle\psi|A|\psi\rangle=|a|^2\langle\phi_1|A|\phi_1\rangle+|b|^2\langle\phi_2|A|\phi_2\rangle+\\+\overline{a}b\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle+\overline{b}a\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle\end{aligned}$$

ეს გამოსახულება უნდა იყოს ნამდვილი. პირველი ორი წევრის ნამ-დვილობა ეჭვს არ იწვევს. მაშასადამე, უნდა განვიხილოთ მარტო მესამე და მეოთხე წევრები. თუ ნებისმიერ პარამეტრებს ასე ავიღებთ $a=b=1$, მიიღება პირობა

$$\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle+\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle=\overline{\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle}+\overline{\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle}$$

თუ ახლა ავრჩევთ $a=1,b=i$, მიიღება

$$i\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle-i\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle=-i\overline{\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle}+i\overline{\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle}$$

i -ზე შეკვეცის შემდეგ, ამ ორი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle=\overline{\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle}\quad(54)$$

საკუთარი ვექტორი და საკუთარი მნიშვნელობა

თუ რაიმე ვექტორზე მოქმედი ოპერატორი წარმოქმნის იმავე ვექტორზე გამრავლებულ სკალარს, მაშინ ამ ვექტორს ეწოდება ***საკუთარი ვექტორი***, ხოლო სკალარს – ***საკუთარი მნიშვნელობა***

$$A\left|\phi\right\rangle = a\left|\phi\right\rangle \quad (55)$$

ანტიწრფივი ურთიერთობა ბრასა და კეტს შორის გვაძლევს მარცხნივ მოქმედ განტოლებას,

$$\left\langle\phi\right|A^{+} = \overline{a}\left\langle\phi\right| \quad (56)$$

თეორემა 2. თუ A არის ერმიტული ოპერატორი, მისი ყველა საკუთარი მნიშვნელობა ნამდვილია.

მტკიცება: გვაქვს $A\left|\phi\right\rangle = a\left|\phi\right\rangle$. ერმიტულობის გამო $\left\langle\phi\right|A\left|\phi\right\rangle = \overline{\left\langle\phi\right|A\left|\phi\right\rangle}$.

ჩავსვათ საკუთარ მნიშვნელობათა განტოლებაში:

$$\left\langle\phi\right|A\left|\phi\right\rangle = \overline{\left\langle\phi\right|A\left|\phi\right\rangle}; \qquad a\left\langle\phi\middle|\phi\right\rangle = \overline{a}\left\langle\phi\middle|\phi\right\rangle$$

ანუ $a = \overline{a}$. შედეგი გვიჩვენებს, რომ თვითშეუღლებული ოპერატორისთვის $A = A^{\dagger}$ - ბრას შეუღლებული აგრეთვე არის საკუთარი ვექტორი, იმავე საკუთარი მნიშვნელობით: $\left\langle\phi\right|A^{\dagger} = a\left\langle\phi\right|$

თეორემა 3.

ერმიტული ოპერატორის სხვადასხვა საკუთარი მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ვექტორები უნდა იყვნენ ორთოგონალური.

მტკიცება: გვაქვს $A\left|\phi_1\right\rangle = a_1\left|\phi_1\right\rangle; \qquad A\left|\phi_2\right\rangle = a_2\left|\phi_2\right\rangle$

ერმიტულობის გამო,

$$0 = \left\langle\phi_1\right|A\left|\phi_2\right\rangle - \overline{\left\langle\phi_2\right|A\left|\phi_1\right\rangle} = a_1\left\langle\phi_2\middle|\phi_1\right\rangle - a_2\overline{\left\langle\phi_1\middle|\phi_2\right\rangle} =$$
$$= \left(a_1 - a_2\right)\left\langle\phi_2\middle|\phi_1\right\rangle$$

ამიტომ $\left\langle\phi_2\middle|\phi_1\right\rangle = 0$, თუ $a_1 \neq a_2$.

თუკი $a_1 = a_2 (= a)$ მაშინ ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია გადაგვარებული საკუთარი ვექტორებისა $\left|\phi_1\right\rangle$ და $\left|\phi_2\right\rangle$ არის აგრეთვე საკუთარი ვექტორი ერთიდაიგივე საკუთარი მნიშვნელობით a.

თუ დავუშვებთ, რომ ვექტორებს აქვთ სასრულო ნორმა, შევძლებთ მათ

მასშტაბურ გარდაქმნას, რათა ჰქონდეთ ერთეულოვანი ნორმა. ამიტომ ყოველთვის ვიმუშავებთ საკუთარი ვექტორების ორთონორმირებული სისტემით,

$$\left(\phi_i, \phi_j\right) = \delta_{ij}$$

სახელმძღვანელოებში ითვლება (მტკიცდება), რომ ერმიტული ოპერატორების საკუთარი ვექტორების ორთონორმალური სისტემა არის ***სრული;*** რაც ნიშნავს, რომ ის ქმნის ბაზისს, რომელიც მოჭიმავს სრულ ვექტორულ სივრცეს.

ჯერ განვიხილოთ

სრული ორთოგონალური სისტემების თვისებები

თუ $\{\phi_i\}$ ვექტორების სისტემა არის *სრული,* ნებისმიერი ვექტორი $|\upsilon\rangle$ შეგვიძლია გავშალოთ მის მიხედვით: $|\upsilon\rangle = \sum_i \upsilon_i |\phi_i\rangle$. ორთოგონალობის პირობის დახმარებით ადვილად ვპოულობთ გაშლის კოეფიციენტებს $\upsilon_i = \langle \phi_i, |\upsilon\rangle$. ამიტომ ვწერთ

$$|\upsilon\rangle = \sum_i |\phi_i\rangle \left(\langle \phi_i | \upsilon\rangle\right) = \left(\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right)|\upsilon\rangle, \qquad \forall |\upsilon\rangle \quad (57)$$

რადგან ეს განტოლება კმაყოფილდება ნებისმიერი $|\upsilon\rangle$ ვექტორისათვის, ფრჩხილებში მოთავსებული ოპერატორი უნდა იყოს ერთეულოვანი,

$$\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I \quad (58)$$

თუ $A|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle$ და საკუთარი ვექტორები ქმნიან სრულ ორთოგონალურ სისტემას, მაშინ ნებისმიერი ოპერატორი შეგვიძლია გამოვსახოთ შეცვლილი ფორმით მისი საკუთარი ვექტორების და სათანადო საკუთარი მნიშვნელობების მიხედვით:

$$A = \sum_i a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (59)"$$

ახლა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ოპერატორის დიაგონალური წარმოდგენა, თუ განვმარტავთ *ოპერატორის ფუნქციას,*

$$f(A) = \sum_i f(a_i)|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (60)$$

ამ მნიშვნელოვან შედეგზე დაყრდნობით ზოგიერთი ავტორი დამტკიცე-

ბის გარეშე უშვებს, რომ კვანტური მექანიკის ერმიტულ ოპერატორებს გააჩნია საკუთარ ვექტორთა სრული სისტემები. **არის კი ასე?**

ნებისმიერი ოპერატორი სასრულო N- განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში შეგვიძლია გამოვხატოთ $N \times N$ მატრიცით.

$$M\phi = \lambda\phi$$

მატრიცული განტოლების არატრივიალური ამოხსნის არსებობის პირობაა

$$\det\left|M - \lambda I\right| = 0 \quad (61)$$

დეტერმინანტის გაშლა გვაძლევს N-ხარისხის პოლინომიალს λ-ს მიხედვით. ყოველ ფესვს უნდა ეთანადებოდეს საკუთარი ვექტორი. თუ ყველა N საკუთარი მნიშვნელობა განსხვავებულია, უნდა არსებობდეს საკუთარი ვექტორები, რომლებიც აუცილებლად მოჭიმავენ N განზომილებიან სივრცეს. უფრო ფრთხილი არგუმენტებია მოსატანი თანხვედრი ფესვების შემთხვევაში.

ეს არგუმენტები არ გამოდგება *უსასრულო* განზომილების სივრცეებში. მართლაც, თუ N ხდება უსასრულო, საქმე გვექნება უსასრულო ხარისხოვან მწკრივთან λ-ს მიხედვით, რომელსაც არ არის აუცილებელი ჰქონდეს რაიმე ფესვები, კრებადობის დროსაც კი. (სპეციალური შემთხვევების გარდა უსასრულო განზომილების მატრიცები განუსაზღვრელია). უმარტივესი კონტრმაგალითია იმპულსის ოპერატორი $P = -id/dx$, განსაზღვრული დიფერენცირებადი ფუნქციების სივრცეში $a \le x \le b$. მისი შეუღლებული, P^{+} განსაზღვრის თანახმად არის

$$\int_a^b \bar{\phi}(x) P^{+} \psi(x)\, dx = \overline{\int_a^b \bar{\psi}(x) P \phi(x)\, dx} =$$

$$= \int_a^b \bar{\phi}(x) P \psi(x)\, dx + i\left[\psi(x)\bar{\phi}(x)\right]_a^b \quad (62)$$

ბოლო სტრიქონი მოიძებნება ნაწილობითი ინტეგრაციით. თუ სასაზღვრო პირობები ისეა შერჩეული, რომ ბოლო წევრი განულდეს, მაშინ P ცხადად ერმიტული ოპერატორი იქნება.

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება

$$-i\frac{d}{dx}\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad (63)$$

არის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნაა

$\phi(x) = ce^{i\lambda x} (c = const.)$. მაგრამ როგორც საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება P-ოპერატორისათვის, ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ საკუთარი ფუნქციები რაიმე ვექტორულ სივრცეში. შეიძლება განიმარტოს რამდენიმე სხვადასხვა ვექტორული სივრცე, იმისდა მიხედვით, თუ როგორ სასაზღვრო პირობებს დავადებთ. ქვემოთ არის შესაძლო ჩამონათვალი:

- არც ერთი სასაზღვრო პირობა – ყველა კომპლექსური λ არის საკუთარი მნიშვნელობა. რაკი P არ არის ერმიტული, ეს არ გვაინტერესებს.
- $a = -\infty,\ b = +\infty,\ |\phi(x)|$ შემოსაზღვრულია, როცა $|x| \to \infty$. λ-ს ყველა ნამდვილი მნიშვნელობა არის საკუთარი. საკუთარი ფუნქციები არ არის ნორმირებადი, მაგრამ ისინი ადგენენ სრულ სისტემას იმ შინაარსით, რომ ნებისმიერი ფუნქცია წარმოიდგინება ფურიე-ინტეგრალად, რომელიც შეიძლება გავიგოთ როგორც ტალღური ფუნქციების უწყვეტი კომბინაციები.
- $a = -L/2,\quad b = +L/2,$ პერიოდული სასაზღვრო პირობებით $\phi(-L/2) = \phi(L/2)$;

საკუთარი მნიშვნელობები ადგენენ დისკრეტულ სპექტრს, $\lambda = \lambda_n = 2\pi n / L$, სადაც n - მთელი რიცხვია, დადებითი ან უარყოფითი. საკუთარი ფუნქციები ადგენენ სრულ ორთონორმირებულ სისტემას, სისრულე მტკიცდება ფურიე-მწკრივების თეორიაში.

- $a = -\infty,\ b = +\infty,\quad \phi(x) \to 0,\ as\ \ x \to \pm\infty$

თუმცა P-ოპერატორი ერმიტულია, მას არ აქვს საკუთარი ფუნქციები ამ სივრცის შიგნით.

განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, რომ უსასრულო განზომილების ვექტორულ სივრცეში ერმიტულ ოპერატორს შეიძლება არ ჰქონდეს საკუთარი ვექტორების სრული სისტემა, რაც დამოკიდებულია ოპერატორის ზუსტ ბუნებაზე და ვექტორულ სივრცეზე. საბედნიეროდ, შესაძლებელია ფორმულირების ისეთნაირი შეცვლა, რომ აღარ იყოს საჭირო კარგად განსაზღვრული საკუთარი ვექტორების არსებობა

სპექტრალური თეორემა

ზემოთ შემოყვანილი გარე ნამრავლი $|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, შედგენილი ერთეულოვანი ნორმის ვექტორებისგან, არის *პროექციული ოპერატორის* მაგალითი. საზოგადოდ, თვითშეუღლებული ოპერატორი Π, რომელიც აკმაყოფილებს თანაფარდობას $\Pi^2 = \Pi$, არის პროექციული ოპერატორი. მისი მოქმედებაა დააგეგმილოს ვექტორის კომპონენტი, რომელიც იმყოფება რომელიმე ქვესივრცეში და გააქროს ამ ქვესივრცის ორთოგონალური ყველა კომპონენტი. თუ A ოპერატორს აქვს გადაგვარებული სპექტრი, შეგვიძლია შევადგინოთ პროექციული ოპერატორი ქვესივრცეზე, რომელიც მოჭიმულია გადაგვარებული $a_i = a$-ს შესაბამისი საკუთარი ვექტორებით,

$$P(a) = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\delta_{a,a_i} \quad (64)$$

და A ოპერატორი გადავწეროთ ასე

$$A = \sum_a aP(a) \quad (65)$$

აქ აჯამვა ხდება საკუთარი მნიშვნელობების სპექტრზე. (მაგრამ, რადგან $P(a) = 0$, თუკი a არ არის საკუთარი მნიშვნელობა, უვნებელია აჯამვა გავავრცელოთ სპექტრის გარეთაც).

ზემოთ ჩამოთვლილი მაგალითები გვეუბნება, რომ სირთულეები გამოწვეულია უწყვეტი სპექტრით, ამიტომ სასურველია ეს ბოლო ტოლობა გადავწეროთ ისეთი ფორმით, რომ გამოდგეს როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი სპექტრისათვის. ყველაზე მოხერხებულად ეს კეთდება ***სტილტიესის ინტეგრალის*** დახმარებით, რომლის განმარტება ასეთია

$$\int_a^b g(x)\,d\sigma(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\left[\sigma(x_k) - \sigma(x_{k-1})\right],$$

ზღვარი ისე უნდა ავიღოთ, რომ ყველა ინტერვალი $(x_k - x_{k-1})$ მიისწრაფოდეს ნულისკენ, როცა $n \to \infty$. არადაცემად $\sigma(x)$ ფუნქციას ეწოდება ***ზომა.*** თუ $\sigma(x) = x$, მაშინ სტილტიესის ინტეგრალი გადადის ჩვეულებრივ რიმანის ინტეგრალში. თუ არსებობს $d\sigma / dx$, მაშინ გვაქვს

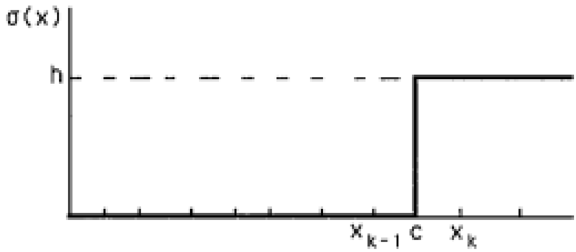
$$\int_{(Stielties)} g(x)\,d\sigma(x) = \int_{(Rieman)} g(x)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)dx$$

არატრივიალური განზოგადება გვაქვს, როცა $\sigma(x)$ არ არის უწყვეტი. მაგალითად, დავუშვათ, რომ

$$\sigma(x) = h\theta(x-c),$$

სადაც $\theta(x)=0$, თუ $x<0$ და $\theta(x)=1$, როცა $x>0$ – ესაა ჩვეულებრივი თეტა-ფუნქცია.

განმარტებიდან ნათელია, რომ ერთადერთი წევრი, რომელიც შეიტანს არანულოვან წვლილს, გვაქვს, როცა $x_{k-1}<c$ და $x_k>c$. ამიტომ ინტეგრალი იქნება ტოლი $hg(c)$.



წყვეტადი ზომის ფუნქცია

თეორემა: (რიცზი, ნეიგუ- 1955):

ყოველ თვითშეუღლებულ A ოპერატორს შეესაბამება $E(\lambda)$ პროექციული ოპერატორების ერთადერთი ოჯახი ნამდვილი λ-ებით და შემდეგი თვისებებით:

(i) თუ $\lambda_1<\lambda_2$, მაშინ $E(\lambda_1)E(\lambda_2)=E(\lambda_2)E(\lambda_1)=E(\lambda_1)$

ფორმალურად რომ ვთქვათ, $E(\lambda)$- აპროექტირებს ქვესივრცეზე $\le\lambda$.

(ii) $\varepsilon>0$, მაშინ $E(\lambda+\varepsilon)|\psi\rangle \to E(\lambda)|\psi\rangle, \quad ,\varepsilon\to 0$

(iii) $E(\lambda)|\psi\rangle \to 0, \quad ,as\ \lambda\to-\infty$

(iv) $E(\lambda)|\psi\rangle \to 0, \quad ,as\ \lambda\to+\infty$

(v) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda)=A$ (66)

(66) განტოლება არის (59) განტოლების განზოგადება ნებისმიერ თვით-შეუღლებულ ოპერატორზე, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს დისკრეტული ან უწყვეტი სპექტრი, ან ამ ორის ნარევი. (60)-ის სათანადო განზოგადება იქნება

$$f\left(A\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\lambda\right)dE\left(\lambda\right) \quad (67)$$

დისკრეტული სპექტრის მაგალითი:

როცა (66) ფორმულას გამოვიყენებთ ოპერატორისთვის სუფთა დისკრეტ-ული სპექტრით, ერთადერთი წვლილი ინტეგრალში წარმოიშვება წყვეტიდან

$$E\left(\lambda\right)=\sum_i \left|\phi_i\right\rangle\left\langle\phi_i\right|\theta\left(\lambda-a_i\right)$$

ეს ხდება საკუთარ მნიშვნელობებზე, წყვეტა $\lambda = a$ წერტილში არის ზუსტად $P\left(a\right)$. ამიტომ (66) დადის (59)-ზე.

უწყვეტი სპექტრის მაგალითი:

მაგალითისთვის განვიხილოთ მდებარეობის ოპერატორი Q, განმარტებული როგორც $Q\psi\left(x\right)=x\psi\left(x\right)$. ტრივიალურად მოწმდება, რომ $Q=Q^{+}$. ახლა საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას $Q\phi\left(x\right)=x\phi\left(x\right)$ აქვს ფორმალური ამონახსნები

$$\phi\left(x\right)=\delta\left(x-\lambda\right) \quad (68)$$

მაგრამ დელტა არ არის კარგად განსაზღვრული ფუნქცია, და თუ მკ-აცრად ვიტყვით, არ გვაქვს საკუთარი ფუნქციები.

მიუხედავად ამისა, სპექტრალური თეორემა კვლავ გამოიყენება. პრო-ექციის ოპერტატორები Q-სთვის არიან განსაზღვრული განტოლებიდან:

$$E\left(\lambda\right)\psi\left(x\right)=\theta\left(\lambda-x\right)\psi\left(x\right)$$

რომელიც არის

$$\psi\left(x\right),\ \ x<\lambda \text{ და } 0\text{, როცა } x>\lambda .$$

ადვილად მოწმდება (63), რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE\left(\lambda\right)\psi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\left[\theta\left(\lambda-x\right)\psi\left(x\right)\right]=x\psi\left(x\right)=Q\psi\left(x\right) \quad (69)$$

გამოთვლისას გავითვალისწინეთ, რომ λ არის საინტეგრაციო ცვლადი, ხოლო x არის მუდმივი.

დირაკის პიონერული ფორმულირების თანახმად მიღებულია, რომ კვანტურ მექანიკაში შემდეგნაირად დავწეროთ ფორმალური საკუთარ მნიშვნელობათა განტოლება Q-ს ტიპის ოპერატორისათვის, რომელსაც აქვს უწყვეტი სპექტრი,

$$Q|q\rangle = q|q\rangle$$

ხოლო ორთონორმირების პირობა ავიღოთ შემდეგი ფორმით

$$\langle q'|q''\rangle = \delta(q'-q'')$$

ცხადია, რომ ამ ფორმალურად საკუთარი ვექტორის ნორმა არის უსასრულო, რადგან ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ $\langle q|q\rangle = \infty$. ნაცვლად (66) სპექტრალური თეორემისა Q-სთვის დირაკი წერს

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} q|q\rangle\langle q|dq, \quad (70)$$

როგორც (66)-ის უწყვეტ ანალოგს. დირაკის ფორმულირება არ გამოდგება ჰილბერტის სივრცის მათემატიკური ფორმულირებისთვის, რომელიც უშვებს მხოლოდ სასრული ნორმის ვექტორებს. პროექციის ოპერატორი, ფორმალურად მოცემული ასე

$$E(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |q\rangle\langle q|dq, \quad (71)$$

კარგად არის განსაზღვრული ჰილბერტის სივრცეში,მაგრამ მისი წარმოებული, $dE(q)/dq = |q\rangle\langle q|$ არ არსებობს ჰილბერტის სივრცის ჩარჩოებში, რადგან $\langle q|q\rangle = \infty$.

უამრავი ცდა, რათა ჩაესვათ კვანტური მექანიკა მათემატიკურად *მკაცრ ჰილბერტის სივრცის ჩარჩოებში*, აღმოჩნდა უშედეგო. ყველაზე მიმზიდველად გამოიყურება ჰილბერტის სივრცის ისეთნაირი გაფართოება, რომ უსასრულო ნორმის ვექტორების განხილვა იყოს შესაძლებელი. ამ პრობლემის შესახებ ქვემოთ გვექნება საუბარი. მანამდე კი მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც ეხება დამზერადი სიდიდეების სისტემას.

თეორემა

თუ A და B არიან *თვითშეუღლებული* ოპერატორები, რომელთაგან ორივეს გააჩნია საკუთარი ვექტორების სრული კრებული, და თუ ისინი კომუტირებენ $AB = BA$, მაშინ იარსებებს ორივე A და B ოპერატორების საკუთარ ვექტორთა სრული სისტემა.

ამ თეორემის მტკიცება მოყვანილია ნებისმიერ სახელმძღვანელოში და აქ არ გავიმეორებთ.

თეორემა ადვილად ზოგადდება ურთიერთკომუტირებადი ოპერატორების ნებისმიერი რაოდენობისთვის, აგრეთვე ადგილი აქვს შებრუნებულ თეორემასაც: თუ A და B ოპერატორებს აქვთ საერთო საკუთარი ვექტორების სრული ერთობლიობა, მაშინ ეს ოპერატორები კომუტირებენ, $AB = BA$. ადგილი აქვს აგრეთვე შემდეგ თეორემას:

თეორემა

ნებისმიერი ოპერატორი, რომელიც კომუტირებს კომუტირებად ოპერატორთა სრული სისტემის ყველა წევრთან, უნდა იყოს ამ კრებულის ოპერატორების ფუნქცია.

კვანტური მექანიკის არსებულ სახელმძღვანელოებში, თითქმის გამონაკლისის გარეშე, თეორია ჩამოყალიბებულია ზემოთ გადმოცემული მათემატიკური აპარატის ჩარჩოებში. გზადაგზა მინიშნებული გვქონდა, რომ მთელ რიგ საკითხებში სივრცის განზომილება განსხვავებულ როლს ასრულებს, რის გამოც შეიძლება წარმოიქმნას პარადოქსალური სიტუაციები. ამიტომ დროა გადავიდეთ ზოგიერთი ცნობილი პარადოქსის გადმოცემაზე სათანადო მათემატიკური განხილვის ჭრილში. ამასთან ერთად ყურადღებას ვაქცევთ ჰილბერტის სივრცის ზოგიერთ სიღრმისეულ საკითხებსაც.

კვანტური მექანიკის მათემატიკური პარადოქსები

პირველ რიგში მოვიყვანოთ იმ პარადოქსების შინაარსი, რომლებიც დაკავშირებულია მათემატიკური ხასიათის პრობლემებთან.

პარადოქსი 1.

ერთ-განზომილებაში მდებარეობის Q და იმპულსის P ოპერატორები აკმაყოფილებენ ჰაიზენბერგის კომუტაციის თანაფარდობას

$$\left[Q,P\right]=i\hbar\mathbf{1} \quad (72)$$

თუ ორივე მხარის შპურს ავიღებთ და გავითვალისწინებთ, რომ შპურის ნიშნის შიგნით ოპერატორთა გადასმა დასაშვებია, მარცხენა მხარეში მიიღება ნული, $Tr\left[Q,P\right]=0$, ხოლო მარჯვენა მხარეში ნულისგან განსხვავებული სიდიდე $i\hbar Tr\left(\mathbf{1}\right)\neq 0$. რა დასკვნა გამომდინარეობს აქედან?

პარადოქსი 2.

განვიხილოთ ტალღური ფუნქციები φ და ψ, რომლებიც არიან კვადრატულად ინტეგრებადი $\mathcal{R}$ სივრცეში (ნამდვილ ღერძზე). ავიღოთ იმპულსის ოპერატორი $P=-i\hbar\frac{d}{dx}$. ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია გამოსახულებაში

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\overline{\varphi\left(x\right)}\left(P\psi\right)\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\overline{\left(P\varphi\right)}\left(x\right)\psi\left(x\right)-i\hbar\left[\left(\overline{\varphi}\psi\right)\left(x\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (73)$$

რადგან φ და ψ არიან კვადრატულად ინტეგრებადი, ჩვეულებრივ იხილავენ ფუნქციებს, რომლებიც ქრებიან, როცა $x\to\pm\infty$. ამიტომ ბოლო წევრი განულდება, ანუ P ოპერატორი გამოდის ერმიტული. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, არსებობენ კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციები, რომლებიც არ ქრებიან უსასრულობაში. როგორ შევათავსოთ ერთმანეთთან ეს ორი შემთხვევა?

მათემატიკის სახელმძღვანელოების თანახმად ფუნქციების კვადრატულად ინტეგრებადობა, საზოგადოდ, ჯერ კიდევ არ ნიშნავს, რომ ასეთი ზღვარი არსებობს ფუნქციებისთვისაც, და, ამიტომ ფუნქციები აუცილებლად არ ნულდებიან უსასრულობაში. არსებობენ კიდეც ფუნქციები, რომლებიც კვადრატულად შეჯამებადია $\mathscr{R}$ -ში, მაგრამ შემოუსაზღვრელი უსასრულობაში. ასეთი მაგალითია ფუნქცია $f(x) = x^2 \exp\left(-x^8 \sin^2 x\right)$. (B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmstem, "Counterexamples in analysis", Berlin, 1964). ეს ფუნქცია მოცემულია ნახაზზე, სადაც ფუნქციის პერიოდი 20-ჯერ არის გაზრდილი – უკეთ რომ გამოჩენილიყო ოსცილაციების გაზრდილი რაოდენობა.

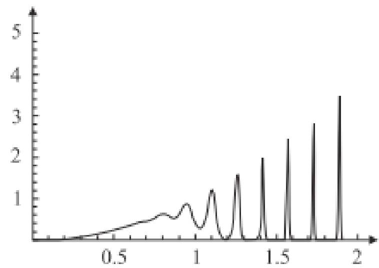
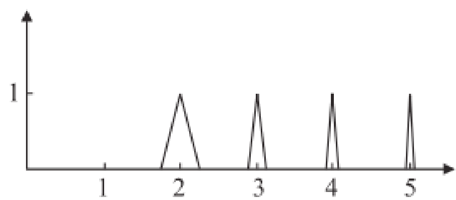


Figure 2.1: Graph of $f(x) = x^2 \exp\left[-x^8 \sin^2(20x)\right]$

არსებობს უფრო მეტად ცნობილი ფუნქციის მაგალითი, რომელიც არის უწყვეტი, დადებითი და ინტეგრებადი $\mathscr{R}$ -ში, თუმცა არ მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $x \to \pm\infty$ (იხ. შემდეგი ნახაზი):



განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$, სადაც f_n ქრება

$\mathscr{R}$ -ში, გარდა $\frac{2}{n^2}$ სიგანის ინტერვალებისა, რომლებშიც f_n -ის გრაფიკი არის სამკუთხედი, სიმეტრიული n -ის მიმართ სიმაღლით 1. ამ სამკუთხედის ფართობია $\frac{1}{n^2}$. ხოლო სრული ფართობისთვის გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty ,$$

მაგრამ f ფუნქცია არ მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $x \to \pm\infty$.

ამ ფაქტის მიუხედავად შეგვიძლია თუ არა ვამტკიცოთ, რომ $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ოპერატორი არის ერმიტული?

პარადოქსი 3.

განვიხილოთ ახლა ოპერატორი

$$A = PQ^3 + Q^3 P \quad (74)$$

რომელიც აგრეთვე ერმიტული უნდა იყოს $\mathscr{R}$ -ში, რადგან ამ თვისებებისაა Q და P. ამ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორია

$$A^+ = \left(PQ^3 + Q^3 P\right)^+ = Q^3 P + PQ^3 = A$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ A- ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები არის ნამდვილი. მიუხედავად ამისა, ადვილად შევამოწმებთ, რომ ფუნქციისათვის

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} |x|^{-3/2} \exp\left(\frac{-1}{4x^2}\right), & for \;\; x \neq 0 \\ 0, & for \;\; x = 0 \end{cases} \quad (75)$$

მიიღება $\hat{A} f = -i\hbar f$, რაც ნიშნავს, რომ A ოპერატორი უშვებს წარმოსახვით საკუთარ მნიშვნელობას ($-i\hbar$). ამავე დროს f ფუნქცია არის უსასრულოდ დიფერენცირებადი $\mathscr{R}$ -ში და კვადრატულად ინტეგრებადი, რადგან

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\left|f\left(x\right)\right|^2 = 2\int_{0}^{\infty} dx\left|f\left(x\right)\right|^2 = \int_{0}^{\infty} dx x^{-3} e^{-1/\left(2x^2\right)} = \left[e^{-1/\left(2x^2\right)}\right]_0^{\infty} = 1$$

რაშია შეცდომა?

პარადოქსი 4.

განვიხილოთ [0,1] ინტერვალში მოძრავი ნაწილაკი და აღვწეროთ ტალღური ფუნქციით ψ, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს $\psi\left(0\right)=0=\psi\left(1\right)$. მაშინ იმპულსის ოპერატორი $P=-i\hbar\dfrac{d}{dx}$ არის ერმიტული, რადგან ნაწილობითი ინტეგრაცია გვაძლევს

$$\int_0^1 dx\left(\bar{\varphi}\left(P\psi\right)-\left(\overline{P\varphi}\right)\psi\right)\left(x\right) = -i\hbar\left[\left(\bar{\varphi}\psi\right)\left(x\right)\right]_0^1 = 0 \quad (76)$$

და რადგან ოპერატორი ერმიტულია, მისი საკუთარი მნიშვნელობები უნდა იყოს ნამდვილი. მათი განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ საკუთარ მნიშვნელობათა განტოლება

$$\left(P\psi_p\right)\left(x\right) = p\psi_p\left(x\right), \qquad \left(p\in\mathcal{R},\psi_p\neq 0\right), \quad (77)$$

ამოხსნაა $\psi_p\left(x\right)=c_p\exp\left(\dfrac{i}{\hbar}px\right), \qquad c_p\in\mathcal{C}-\left\{0\right\}$. სასაზღვრო პირობა $\psi_p\left(0\right)=0$ ახლა ნიშნავს, რომ $\psi_p\equiv 0$, რადგან გამომდინარეობს $c_p=0$. ამიტომ P-ს არ აქვს საკუთარი ფუნქცია. უფრო მეტიც, მისი სპექტრი არის მთელი კომპლექსური სიბრტყე, და ამიტომ P არ წარმოადგენს დამზერადს. როგორ უნდა გავიგოთ ეს საკვირველი რეზულტატი?

პარადოქსი 5.

თუ პოლარულ კოორდინატებს შემოვიტანთ სიბრტყეზე ან სფერულ კოორდინატებს სივრცეში, მაშინ პოლარული კუთხე φ და მომენტის კომპონენტა L_Z არიან კანონიკურად

შეუღლებული ცვლადები კლასიკურ მექანიკაში. კვანტურ თეორიაში φ-ცვლადი ხდება გამრავლების ოპერატორი $\psi(\varphi)$ ფუნქციისა φ-ზე და $L_Z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ აკმაყოფილებს კომუტაციის თანაფარდობას

$$\left[\varphi, L_Z\right] = i\hbar\mathbf{1} \quad (78)$$

L_Z ოპერატორი მოქმედებს პერიოდულ ტალღურ ფუნქციაზე $\psi(0)=\psi(2\pi)$ და არის ერმიტული. უფრო მეტიც, L_Z-ს აქვს ორთოგონალურ საკუთარ ფუნქციათა ψ_m სრული სისტემა

$$L_Z\psi_m = m\hbar\psi_m, \qquad \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im\varphi), \quad , m \in \mathcal{Z} \quad (79)$$

ორთონორმალიზების ქვეშ გვესმის სკალარული ნამრავლის გამოყენება

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \overline{\psi_1(\varphi)} \psi_2(\varphi)$$

(74) კომუტატორის გასაშუალოებით ψ_m მდგომარეობაში და L_Z-ის ერმიტულობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} -i\hbar &= \left\langle \psi_m, (-i\hbar\mathbf{1})\psi_m \right\rangle = \left\langle \psi_m, L_Z\psi_m \right\rangle - \left\langle \psi_m, \varphi L_Z\psi_m \right\rangle = \\ &= \left\langle L_Z^+\psi_m, \varphi\psi_m \right\rangle - m\hbar\left\langle \psi_m, \varphi\psi_m \right\rangle = (m\hbar - m\hbar)\left\langle \psi_m, \varphi\psi_m \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

ცხადია, რომ რაღაც ფაქიზი მომენტი უნდა იყოს სადღაც გამოყვანისას.

პარადოქსი 6.

დავუმატოთ ახლა ცოტაოდენი წინა შედეგს. 1927 წელს პაულიმ შენიშნა, რომ კომუტაციის თანაფარდობა (74) კოში-შვარცის უტოლობის გამოყენებით უკავშირდება ჰაიზენბერგის განუზღვრელობათა თანაფარდობას $\Delta P \Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$. რადგან ამ

კომუტაციის თანაფარდობას იგივე სახე აქვს, რაც (72)-ს, იმავე გზით უნდა მიგვეღო განუზღვრელობათა თანაფარდობა

$$\Delta L_Z \Delta\varphi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (81)$$

მაგრამ ფიზიკური სიტუაცია გვეუბნება, რომ ეს უტოლობა არ უნდა იყოს სწორი. ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ მდგომარეობა, რომლისთვისაც $\Delta L_Z < \hbar / 4\pi$ და მაშინ φ კუთხის განუზღვრელობა უნდა იყოს მეტი, ვიდრე 2π, რასაც არ აქვს ფიზიკური შინაარსი, რადგან φ იღებს მნიშვნელობებს ინტერვალში $[0,2\pi)$. როგორ უნდა შეიძლებოდეს, რომ (78) თანაფარდობა იყოს კორექტული, თუმცა (81) არა?

სხვათა შორის, ამ მაგალითიდან ვხედავთ, რომ განუზღვრელობის თანაფარდობა

$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[A,B\right]\right\rangle\right|$ ნებისმიერი ორი დამზერადისთვის A და B, (რომლის გამოყვანა შეიძლება ინახოს კვანტური მექანიკის ნებისმიერ სახელმძღვანელოში) ***არ არის სამართლიანი, საზოგადოდ.***

პარადოქსი 7.

განვიხილოთ m მასის ნაწილაკი უსასრულო პოტენციალურ ორმოში

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a, \quad (a>0) \\ \infty, & otherwise \end{cases}$$

ჰამილტონიანი ორმოს შიგნით ემთხვევა თავისუფალს: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$. განვიხილოთ მდგომარეობა

$\psi(x) = \frac{\sqrt{15}}{4a^{5/2}}\left(a^2 - x^2\right),\ |x| \leq a,$ და $\psi(x) = 0$, ამ არის გარეთ (82)

ეს არის მოცემულ მომენტში ნაწილაკის ნორმირებული ტალღური ფუნქცია. ნათელია, რომ $H^2\psi = \frac{\hbar^4}{4m^2}\frac{d^4\psi}{dx^4} = 0$. ამიტომ H^2-ის საშუალო მნიშვნელობა ψ მდგომარეობაში ნულის ტოლია

$$\left\langle H^2 \right\rangle_\psi = \left(\psi, H^2\psi\right) = \int_{-a}^{+a} dx\overline{\psi(x)}\left(H^2\psi\right)(x) = 0 \quad (83)$$

მეორეს მხრივ, საშუალო მნიშვნელობის განსაზღვრა შეგვიძლია H-ის საკუთარი ფუნქციებით და საკუთარი მნიშვნელობებით ასე (ამოხსნა იხ., კვანტური მექანიკის ნებისმიერ სახელმძღვანელოში უსასრულო სიღრმის პოტენციალური ორმოსთვის)

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n, \text{ სადაც } E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}n^2, \qquad (n = 1,2,...) \quad (84)$$

ახლა გამოვიყენოთ ალბათობის თეორიიდან ცნობილი ფორმულა

$$\left\langle H^2 \right\rangle_\psi = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 W_n, \qquad W_n = \left|\left\langle \varphi_n, \psi \right\rangle\right|^2$$

თუ ამ გზას გავყვებით, არ მივიღებთ ნულოვან მნიშვნელობას, რადგან $E_n^2 > 0$ და $0 \le W_n \le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} W_n = 1$. აქ W_n-ით აღნიშნულია n მდგომარეობის გამოჩენის ალბათობის სიმკვრივე. მართლაც, ცხადი გამოთვლები იძლევა $\left\langle H^2 \right\rangle_\psi = \frac{15\hbar^4}{8m^2a^4}$. რომელი პასუხია სწორი და სად წარმოიშვა გადაცდომა?

სათანადო გამოთვლები და პასუხები ყველა ჩამოთვლილ პარადოქსზე მოცემული გვექნება გარკვეული მათემატიკური აპარატის – ფუნქციონალური ანალიზის შესაბამისი ფორმალიზმის განხილვის შემდეგ.

ჰილბერტის და აღჭურვილი ჰილბერტის სივრცეები

როგორც ქვემოთ დავინახავთ, რიცზის თეორემის თანახმად სასრულ-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეებში გვაქვს ერთი-ერთზე (ურთიერთცალსახა) შესაბამისობა ოპერატორებსა და მატრიცებს შორის. ზოგ შემთხვევებში ოპერატორთა შესწავლა დაიყვანება მატრიცების შესწავლაზე, რომლებიც არიან ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვების კრებულები.

გაწარმოების ოპერატორი არ არის შემოსაზღვრული ოპერატორი ჰილბერტის კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების სივრცეში. მაგალითად, ავიღოთ ფუნქცია $f(x)=\sqrt{(x-a)}$, მიიღება

$$\|f\|^2=\int_a^b (x-a)\,dx=\frac{1}{2}(b-a)^2 \;\Rightarrow \|f\|=(b-a)/\sqrt{2}$$

მაშინ, როცა $df/dx=1/\left(2\sqrt{x-a}\right)$ გვაძლევს

$$\|Df\|^2=\frac{1}{4}\int_a^b \frac{dx}{(x-a)}=\infty, \text{ ანუ } \|D\|=\infty .$$

ე.ი. გაწარმოების ოპერატორი შემოუსაზღვრელია.

წინადადება: ოპერატორი შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მას სასრულო ნორმის ვექტორი გადაყავს ისევ სასრულო ნორმის ვექტორში.

შეუღლებული ოპერატორი, როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ**,** განიმარტება ასე $\overline{\langle y|A|x\rangle}=\langle x|A^+|y\rangle$ ან $\langle Ax|y\rangle=\langle x|A^+|y\rangle$. სასრულ-განზომილებიან შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვთვალოთ შეუღლებულის მატრიცული წარმოდგენა ამ განმარტების გამოყენებით და განვაზოგადოთ ყველა ბაზისზე მსგავსების გარდაქმნით. ამიტომ არ წამოიჭრება ოპერატორის შეუღლებულის არსებობის საკითხი. უსასრულო განზომილების

სივრცეში კი უნდა ვამტკიცოთ არსებობის საკითხი. ამიტომ ამტკიცებენ ***თეორემას***:

თეორემა: $\langle Ax | y \rangle = \langle x | A^{+} | y \rangle$ *ფორმულით განმარტებული შეუღლებული ოპერატორი არსებობს. უფრო მეტიც,* $\|A\| = \|A^{+}\|$. *ე.ი. ოპერატორს და მის შეუღლებულს აქვთ ერთნაირი ნორმა!*

უსასრულო განზომილების სივრცეში ამ თეორემის ანალოგი რთული დასამტკიცებელია და მოითხოვს უსასრულო-განზომილების სათანადო სპექტრალურ თეორიას.

განმარტება 1. **წინა-ჰილბერტის** სივრცე (ან *შინაგანი ნამრავლის სივრცე*) არის ვექტორული სივრცე X რაიმე K - ველზე, რომელიც დასახლებულია სკალარული (ანუ, შინაგანი) ნამრავლით, ე.ი. ფუნქციით $\langle . | . \rangle : V \times V \to K$, რომელსაც აქვს შემდეგი 3 თვისება:

1. წრფივ-ნახევრიანობა (*sesqilinearity*- *полторалинейнность*)

$\langle x | \lambda \upsilon + \mu w \rangle = \lambda \langle x | \upsilon \rangle + \mu \langle x | w \rangle$ - *წრფივობა* მეორე არგუმენტის მიმართ და

$\langle \lambda \upsilon + \mu w || x \rangle = \bar{\lambda} \langle \upsilon | x \rangle + \bar{\mu} \langle w | x \rangle$ - *ანტი-წრფივობა* პირველი არგუმენტის მიმართ

2. $\langle w | \upsilon \rangle = \overline{\langle \upsilon | w \rangle}$ - ანტისიმეტრიულობა

3. $\langle \upsilon | \upsilon \rangle > 0 \quad \upsilon \neq 0$, - დადებითად განსაზღვრულობა

შინაგანი ნამრავლი განსაზღვრავს ნორმას X -ზე შემდეგნაირად

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \quad (85)$$

და მეტრიკას

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \quad (86)$$

ამიტომ შინაგანი ნამრავლის სივრცეები არიან ნორმირებული მეტრიკული სივრცეები.

(1) თვისების მეორე სტრიქონის გამო, იტყვიან, რომ შინა-

განი ნამრავლი არის პირველი არგუმენტის მიხედვით *შეუღლე-ბულად წრფივი,* ხოლო მეორის მიხედვით *წრფივი.* ორივე თვისების ერთდროულად გამოსახატავად ვიტყვით, რომ შინა-განი ნამრავლი არის ერთნახევრად წრფივი, რაც ნიშნავს, რომ

ის არის „$1\frac{1}{2}$-ჯერ წრფივი“. ადვილად მოწმდება, რომ შინაგან

ნამრავლთა სივრცე აკმაყოფილებს მნიშვნელოვან პარალელო-გრამის ტოლობას

$$\left\|x+y\right\|^2+\left\|x-y\right\|^2=2\left(\left\|x\right\|^2+\left\|y\right\|^2\right) \quad (87)$$

სახელწოდება ნასესხებია ელემენტარული გეომეტრიიდან. თურმე *ყველა ნორმირებული სივრცე არ არის შინაგანი ნამ-რავლის სივრცე.*

ჰილბერტის სივრცე არის წინა-ჰილბერტის სივრცე, რომე-ლიც არის *სრული* (მეტრიკული სივრცეების შინაარსით, ე.ი. კოშის ყოველი მიმდევრობა იკრიბება რაიმე ზღვრისკენ იმავე სივრცეში).

შეხსენება: კოშის მიმდევრობა ასე **განიმარტება**:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N:\quad \forall n,m>N,\quad \left\|\psi_n-\psi_m\right\|<\varepsilon$$

რაც „ჩვეულებრივ“ ენაზე ნიშნავს შემდეგს: მიმდევრო-ბა $\{x_n\}$ მეტრიკულ სივრცეში $X=(X,d)$ იწოდება ***კოშის (ან ფუნდამენტურ) მიმდევრობად,*** თუ ყოველი დადებითი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს რიცხვი $N=N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$d(x_m,x_n)<\varepsilon$ ყველა $m,n>N$-ისთვის.

ასეთ სივრცეს ეწოდება ***სრული,*** თუ კოშის ყველა მიმდევ-რობა X-ში კრებადია (ანუ, აქვს ზღვარი, რომელიც არის X-ის ელემენტი)

მაგალითი სივრცისა, რომელიც არ არის სრული, არის რა-ციონალური რიცხვების სიმრავლე $\mathcal{Q}$, რომელიც არის რეალ-ური $\mathcal{R}$ რიცხვების სიმრავლის ქვესიმრავლე.

სრული სივრცის მნიშვნელოვანი თვისება იმაშია, რომ ყოველი ჩაკეტილი ქვესივრცე არის სრული. გავიხსენოთ, რომ ჩაკეტილი სივრცე შეიცავს ყველა სასაზღვრო წერტილს. ამიტომ $\mathscr{H}$ -ის ჩაკეტილი ვეტორული ქვესივრცე არის სრული და თავისთავად არის ჰილბერტის სივრცე.

ნამდვილი ან კომპლექსური ჰილბერტის სივრცე ეწოდება ჰილბერტის სივრცეს, რომელშიც $K=\mathscr{R}$ -ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა ან $K=\mathscr{C}$ - არის კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე.

ჰილბერტის სივრცეები არსებითად განიმარტებიან მათი ბაზისებით.

ვამბობთ, რომ ჰილბერტის $\mathscr{H}$ სივრცე არის ***სეპარაბელური***, ანუ არსებობს თვლადი ბაზისი $S\subset\mathscr{H}$, რომელიც ყველგან მკვრივია $\mathscr{H}$ -ში. სხვა სიტყვებით: ყოველი ვექტორი $\varphi\in\mathscr{H}$ არის ზღვარი $\{\varphi_n\}$ მიმდევრობისა S -ში. მაგალითად, რაციონალური რიცხვების ერთობლიობა ადგენს თვლად ბაზისს და არის მკვრივი ყველგან ნამდვილი რიცხვების სივრცეში, ამიტომაც $\mathscr{R}$ არის სეპარაბელური.

ყველაზე მნიშვნელოვანი შედეგი ჩამოთვლილი თვისებებისა არის სისრულე და ორთოგონალურობა $\{\psi_n\}$ ვექტორების სისტემისა $\mathscr{H}$ -ში. ნებისმიერი ვექტორი $\mathscr{H}$ -ში შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\psi=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}c_n\psi_n\equiv\sum c_n\psi_n, \qquad \langle\psi_i|\psi_j\rangle=\delta_{ij};\;\; c_n=\langle\psi_n|\psi\rangle$$

ანუ ყველა ვექტორისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$|\psi\rangle=\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\psi\rangle$$

რომელსაც სიმბოლურად ჩავწერთ ასე

$$\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|=1$$

რაც არის სისრულის პირობა.

ნორმის სასრულობის მოთხოვნა გულისხმობს, რომ

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |c_i|^2 < \infty$$

სასრულო განზომილების ჰილბერტის სივრცეში ჩამოთვლილი თვისებები ავტომატურად სრულდება. და, პირიქით, უსასრულო განზომილების ჰილბერტის სივრცეებში ეს მოთხოვნები ძალიან მნიშვნელოვანია.

ჰილბერტის სივრცის მაგალითები:

როგორც ვნახეთ, ჰილბერტის $\mathcal{H}$ სივრცის ორთონორმალური ბაზისი არის B ვექტორთა ერთობლიობა $\mathcal{H}$-ში, რომელშიც სრულდება: $\langle \upsilon | w \rangle = \delta_{\upsilon w}, \quad \upsilon, w \in B$ და $x = \sum_{\upsilon \in B} x \langle x | \upsilon \rangle, \quad , \forall x \in \mathcal{H}$.

a) **ევკლიდური სივრცე** $\boldsymbol{R}^n$. ამ სივრცეში შინაგანი ნამრავლი ასე განიმარტება:

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \ldots + \xi_n \eta_n \quad (88)$$

სადაც ξ_i, η_i არიან x, y ვექტორების კომპონენტები. გვაქვს

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 \right)^{1/2}$$

ხოლო ევკლიდური მეტრიკა ასე განისაზღვრება

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \left[\left(\xi_1 - \eta_1 \right)^2 + \ldots + \left(\xi_n - \eta_n \right)^2 \right]^{1/2}$$

b) **უნიტარული სივრცე** $\boldsymbol{C}^n$**.** შინაგანი ნამრავლი ასე განიმარტება:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\xi}_1 \eta_1 + \ldots + \overline{\xi}_n \eta_n \quad (89)$$

ნორმა არის

$$\|x\| = \left(\overline{\xi}_1 \xi_1 + \ldots + \overline{\xi}_n \xi_n \right)^{1/2} = \left(|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2 \right)$$

ადვილად შევამოწმებთ დანარჩენ თვისებებსაც.

გ) კვანტური მექანიკისთვის ყველაზე მნიშვნელოვანია კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების სივრცე, $L^2(\mathcal{R}, dx)$ ან ზოგადად **სივრცე** $\boldsymbol{L}^2[a,b]$.

ნორმა განიმარტება ასე

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 \, dt \right)^{1/2}, \quad (90)$$

რომელიც მოიძებნება შინაგანი ნამრავლიდან

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$$

გამოყენებებში უფრო ხშირად გვხვდება კომპლექსური სიდიდეების სივრცე, სადაც $\langle x, y \rangle = \int_a^b \overline{x}(t)\, y(t)\, dt$, ანუ

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \quad (91)$$

შენიშვნა: არათვლადი მდებარეობის და იმპულსის ბაზისები არ არიან სწორი ბაზისები, რადგან არც ბრტყელი ტალღები და არც დელტა ფუნქციები არ არიან კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციები.

თეორემა: (*ჰილბერტის სივრცეების კლასიფიკაცია*) *ელემენტთა ნებისმიერი რაოდენობის სისტემისათვის იზომორფიზმის სიზუსტით არსებობს მხოლოდ **ერთი** ჰილბერტის სივრცე. კერძოდ, ორი ჰილბერტის სივრცე იზომორფულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მათი განზომილებები ემთხვევა!*

შემოუსაზღვრელი წრფივი ოპერატორები ჰილბერტის სივრცეში

შემოუსაზღვრელი წრფივი ოპერატორები ფართოდ გამოიყენება კვანტურ მექანიკაში. მათი თეორია უფრო რთულია, ვიდრე შემოსაზღვრული ოპერატორებისა. ქვემოთ ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოოდ ჰილბერტის სივრცით, რაც ყველაზე საინტერესოა ფიზიკისათვის. სინამდვილეში შემოუსაზღვრელ ოპერატორთა თეორიის განვითარება სტიმულირებული იყო ადრეულ 1920-იან წლებში, რათა კვანტური მექანიკისათვის მიეცათ მკაცრი მათემატიკური საფუძველი. თეორიის სისტემატური განვითარების მცდელობები ეკუთვნით, პირველ რიგში, ფონ ნეიმანს (1929-30,1936) და სტოუნს (1932).

შემოუსაზღვრელი ოპერატორებისათვის დომენების განხილვა და მათი გაგრძელება გახდა უპირველესი პრობლემა. იმისათვის, რომ A ოპერატორის ჰილბერტულად (ერმიტულად) შეუღლებული A^+ ოპერატორი არსებობდეს, A უნდა იყოს *მკვრივად განმარტებული* $\mathcal{H}$-ში, ე.ი. მისი დომენი $\mathcal{D}(A)$ უნდა იყოს მკვრივი.

პრაქტიკულ პრობლემებში ხშირად გვხვდება წრფივი ოპერატორები, რომლებიც არიან ჩაკეტილი ან აქვთ ჩაკეტილი წრფივი გაგრძელებები.

გავიხსენოთ, რომ A **ოპერატორის დომენი** $\mathcal{D}(A)$ არის ჰილბერტის სივრცის ყველა ψ ვექტორების სისტემა, ისეთი, რომ $A\psi$ არის აგრეთვე ჰილბერტის სივრცის კარგად განსაზღვრული წევრი.

დომენი ნიშნავს წრფივ ქვესივრცეს $\mathcal{H}$-ში, რომელზეც A-ს მოქმედებას აქვს აზრი. დომენის წრფივობა აუცილებელია A-ს წრფივობასთან თანხმობისთვის სუპერპოზიციის პრინციპის დასაკმაყოფილებლად. კერძოდ, A-ს ფორმალურ მოქმედებასთან ასოცირებული დომენი გვესმის როგორც (წრფივი) ქვესივრცე $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, რომლის ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობას $A\psi \in \mathcal{H}$. ეს ცნება პრაქტიკულად არაარსებითია, როცა A ოპერატორი არის ***შემოსაზღვრული*** $\mathcal{H}$-ში, სახელდობრ როცა

$$\|A\|_{op} < \infty,$$

სადაც $\|A\|_{op} := \sup\limits_{\psi \in \mathscr{H}} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|}, \quad ,\psi \in \mathscr{H}, \quad \|\psi\| \neq 0$

ანუ, როდესაც ფორმალური მოქმედება ნებისმიერ $\psi \in \mathscr{H}$-ზე იძლევა $A\psi \in \mathscr{H}$. ეს თვისება იგულისხმება კვანტური მექანიკის საბაკალავრო კურსებში, როგორც დირაკის წიგნშია აღნიშნული: "წრფივი ოპერატორი განიხილება როგორც სავსებით განსაზღვრული მისი მოქმედებით კეტ ვექტორზე".

შევთანხმდეთ შემდეგ კლასიფიკაციაზე: ვიტყვით, რომ A არის ოპერატორი $\mathscr{H}$**-ზე**, თუ მისი დომენი არის მთელი $\mathscr{H}$, და არის ოპერატორი $\mathscr{H}$**-ში,** თუ მისი დომენი ძევს $\mathscr{H}$-ში, მაგრამ არ არის მთელი $\mathscr{H}$. გარდა ამისა, აღნიშვნა

$$S \subset A$$

ნიშნავს, რომ A არის S-ის გაგრძელება.

შემოუსაზღვრელი წრფივი ოპერატორები და მათი ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორები

მოსალოდნელია, რომ შემოუსაზღვრელი წრფივი ოპერატორები განსხვავდება შემოსაზღვრულისგან და საკითხავია, თუ რა კითხვებს უნდა მივაქციოთ ყურადღება. ცნობილი შედეგი (იხ. ქვემოთ) გვეუბნება, რომ განსაკუთრებული როლი მიეკუვნება ოპერატორის დომენს და გაგრძელების პრობლემას. ოპერატორის ბევრი თვისება დამოკიდებულია დომენზე. შემოსაზღვრული ოპერატორისთვის თვითშეუღლებულობა ასე განვსაზღვრეთ

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad (92)$$

რაც მეტად მნიშვნელოვანი თვისებაა. ხოლო შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ამ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი შემოუსაზღვრელი ოპერატორი შეუძლებელია განიმარტოს მთელ $\mathscr{H}$-ზე.

ჰელინგერ-ტეპლიცის თეორემა (შემოსაზღვრულობა)

თუ A წრფივი ოპერატორი განმარტებულია მთელ კომპლექსურ ჰილ-ბერტის სივრცეზე $\mathcal{H}$ და აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობას ყველა $x, y \in \mathcal{H}$ -სთვის, მაშინ ის შემოსაზღვრულია.

მტკიცება:

აქ და შემდეგ დამტკიცებანი იხილეთ წიგნში E.Kreyszig, “Introductory functional analysis with applications, 1978

დავუშვათ საწინააღმდეგო: $\mathcal{H}$ შეიცავდეს ისეთ მიმდევრობას, რომ

$$\|y_n\| = 1, \qquad \|Ay_n\| \to \infty$$

განვიხილოთ f_n ფუნქციონალი ასეთი

$$f_n(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

სადაც $n = 1, 2, \ldots,$ და გამოვიყენეთ (92). ყველა f_n განმარტებულია მთელ $\mathcal{H}$ -ზე და არის წრფივი. თითოეული ფიქსირებული n -ისთვის f_n შემოსაზღვრულია შვარცის უტოლობის გამო

$$\left| f_n(x) \right| = \left| \langle x, Ay_n \rangle \right| \le \|Ay_n\| \|x\|$$

უფრო მეტიც, ყოველი ფიქსირებული $x \in \mathcal{H}$ -ისთვის $\left(f_n(x) \right)$ მიმდევ-რობა შემოსაზღვრულია, რადგან შვარცის უტოლობა და $\|y_n\| = 1$ გვაძლევს $\left| f_n(x) \right| = \left| \langle Ax, y_n \rangle \right| \le \|Ax\|$

აქედან და შემოსაზღვრული ოპერატორების შესახებ თეორემიდან ვასკვნით, რომ $\left| f_n(x) \right| \le \|f_n\| \|x\| \le k \|x\|$, თუ ავიღებთ, $x = Ay_n$, მივიღებთ

$$\|Ay_n\|^2 = \langle Ay_n, Ay_n \rangle = \left| f_n(Ay_n) \right| \le k \|Ay_n\|$$

ამიტომ, $\|Ay_n\| \le k$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას $\|Ay_n\| \to \infty$ და ამტკიცებს თეორემას.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ A -ოპერატორი უწყვეტია მაშინ და მხო-ლოდ მაშინ, თუ ის არის **შემოსაზღვრული**; სასრულო განზომილების ჰილ-ბერტის სივრცეში ყველა ოპერატორი არის შემოსაზღვრული, რაც აღარ ხდება უსასრულო განზომილების სივრცეში.

საინტერესოა, რომ უწყვეტობის ცნება წრფივი ოპერატორებისთვის არის

გლობალური: თუ ოპერატორი უწყვეტია წერტილში, ასევე მოხდება ყველგან ჰილბერტის სივრცეში და პირიქით, თუ ის არის შემოუსაზღვრელი, ის იქნება წყვეტადი ყველგან. ამის გაგება შეგვიძლია იმის შენიშვნით, რომ ψ -ის უწყვეტობა, რომელიც მოიცემა ასე

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \qquad \forall \varphi : \|\varphi - \psi\| < \delta \Rightarrow \|A\psi - A\varphi\| < \varepsilon$$

შეიძლება გადაითარგმნოს მტკიცებაში სათავის (0-ის) მიმართ შემდეგნაირი გადაწერით

$$f = \varphi - \psi \;\; \text{და} \;\; A(\psi) - A(\varphi) = A(\psi - \varphi) = A(f)$$

ამის მაგალითად უკვე გვქონდა Q და P ოპერატორებისთვის ზემოთ მიღებული თანაფარდობა

$$2\|P\|\|Q\| \geq n\hbar \, ,$$

რადგან ის სამართლიანია ნებისმიერი n -ისთვის, რის გამოც ერთ-ერთი ოპერატორთაგან ან ორივე უნდა იყოს შემოუსაზრვრელი.

შემოუსაზღვრელი ოპერატორების მაგალითები

ცნობილი მაგალითებიდან მოვიყვანოთ ჰარმონიული ოსცილატორის ენერგიის ოპერატორი

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

რომელიც არის შემოუსაზღვრელი, რადგან გვაქვს მდგომარეობები ψ_n ისეთი, რომ $H\psi^{(n)} = E_n \psi^{(n)}, \quad \|\psi_n\| = 1$, ენერგიის ნებისმიერად დიდი მნიშვნელობისთვის.

ამავე ამოცანაში მდებარეობის x ოპერატორისთვის მდგომარეობები $\psi^{(n)} = \dfrac{e^{-x^2/2n^2}}{\pi^{1/4} n^{1/2}}$ არიან ნორმალიზებული, მაგრამ

$$\left\| x\psi^{(n)} \right\|^2 = \frac{n^2}{2}$$

ხდება ნებისმიერად დიდი.

ერთ განზომილებაში $\psi\left(x\right)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\in\mathcal{H}$, მაგრამ $x\psi\notin\mathcal{H}$

ამ მაგალითებიდან ნათელი ხდება, რომ ხანდახან ოპერატორის მოქმედება $\mathcal{H}$ -ის ვექტორზე შეიძლება არ იყოს განმარტებული (ე.ი. არ იძლეოდეს მდგომარეობას $\mathcal{H}$ -ში). სწორედ ამიტომ შემოაქვთ ოპერატორის ***დომენი***, ქვესივრცე $\mathcal{H}$ -ში, რომელზეც A მოქმედებს როგორც

$$\psi\in\mathcal{D}\left(A\right)\subset\mathcal{H},\qquad \text{თუ }\ A\psi\in\mathcal{H}$$

ეს განმარტება მეტად მოქნილია, რადგან საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ შესაძლო გაფართოება დომენისა, როგორც ქვემოთ დავრწმუნდებით.

იმის აუცილებლობა, რომ საქმე გვქონდეს შემოუსაზღვრელ ოპერატორებთან, გვაიძულებს მოვითხოვოთ უფრო მეტად ზუსტი პირობები დინამიკურ ცვლადებთან დაკავშირებული ოპერატორებისათვის.

პირველ რიგში გავიხსენოთ, რომ ოპერატორი არის ერმიტული ანუ სიმეტრიული, თუ

$$\forall f,g\in\mathcal{D}\left(A\right),\qquad \left\langle Af\middle|g\right\rangle=\left\langle f\middle|Ag\right\rangle$$

დინამიკური ცვლადის საშუალო მნიშვნელობა უნდა იყოს ნამდვილი ნებისმიერ მდგომარეობაში. ამისთვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ A იყოს ერმიტული.

სასრულო განზომილებიან $\left(N\right)$ სივრცეში, ეს მოთხოვნა ეკვივალენტურია პირობისა, რომ ოპერატორის მატრიცული წარმოდგენა მოცემულ ბაზისში იყოს ერმიტული. დავუშვათ, რომ $\left\{\left|e_i\right\rangle\right\}$ იყოს ორთონორმალური ბაზისი და განვსაზღვროთ მატრიცა $A\left|e_i\right\rangle=\sum_{j=}^{N}A_{ji}e_j$. წინა თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ $A_{ij}=\overline{A}_{ji}$ და $A\left(\sum_i c_i\left|e_i\right\rangle\right)=\sum_{ij}\left(A_{ij}c_j\right)\left|e_i\right\rangle$. ამასთან დაკავშირებით ადგილი აქვს მნიშვნელოვან თეორემას (***ჰელინგერ-ტეპლიცის*** თეორემა): ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია ყველგან $\mathcal{H}$ -ში, თვისებით

$$\left\langle A\phi\middle|\psi\right\rangle=\left\langle\phi\middle|A\psi\right\rangle$$

არის აუცილებლად **შემოსაზღვრული**. აქედან გამომდინარე, ვასკვნით,

რომ შემოუსაზღვრელი ოპერატორებისათვის “ნამდვილობის” პირობა მოითხოვს უფრო ფრთხილ შესწავლას.

ადვილია მოვიფიქროთ მაგალითები, როდესაც A ოპერატორის ფორმალური მოქმედება არ გადაიყვანს ψ ვექტორს $A\psi$ ვექტორში $\mathcal{H}$ -დან.

სამი მთავარი მიზეზი, რომლის გამო მოცემული ψ ვექტორი შეიძლება არ იყოს $\mathcal{D}(A)$ დომენში:

1. თუ A ოპერატორის მოქმედება არ არის განმარტებული ψ -სთვის, ე.ი. $A\psi$ არ მიეკუთვნება ჰილბერტის სივრცეს.

მაგალითად, განვიხილოთ ჰილბერტის სივრცე და მასში იმპულსის ოპერატორი $A=-i\dfrac{d}{dx}$. ცხადია, $A\psi$ რომ არსებობდეს, ψ უნდა იყოს დიფერენცირებადი თითქმის ყველგან. მაგრამ რომ იყოს ჰილბერტის სივრცეში, უნდა იყოს კვადრატულად ინტეგრებადი. ეს კი არ ნიშნავს, რომ იყოს დიფერენცირებადი ყველგან. ეს შეზღუდვა, თუმცა არსებითია, მაგრამ გვხვდება ძალიან იშვიათად.

2. ოპერატორული მიწერა კარგად არის განსაზღვრული, მაგრამ მიღებული ვექტორი არ იმყოფება ჰილბერტის სივრცეში. განვიხილოთ იგივე მაგალითი მდგომარეობაში $\psi=\sqrt{2|x|}e^{-|x|}$. ახლა ψ არის ჰილბერტის სივრცეში, რადგან იგი კვადრატულად ინტეგრებადია, ნორმირებულიც კი არის, მაგრამ მისი წარმოებულია

$$\psi'(x)=\frac{x}{|x|}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2|x|}}\left(1-2|x|\right) \quad (93)$$

ეს ფუნქცია კარგად არის განმარტებული ყველგან, სათავის გარდა, მაგრამ არ არის კვადრატულად ინტეგრებადი, რაც ადვილად მოწმდება, რადგან გამოთვლისას ვხვდებით შემდეგი სახის ინტეგრალს: $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}=\infty$. (შეამოწმეთ). ამიტომ, ψ' არ მიეკუთვნება ჰილბერტის სივრცეს.

სხვა საინტერესო მაგალითებს კიდევ შევხვდებით ტექსტში.

3. ხანდახან საჭიროა, რომ $\mathcal{D}(A)$ შევზღუდოთ ჩვენ თვითონ იმის მოთხოვნით, რომ A ოპერატორი იყოს ერმიტული, რაც ხშირად უკავშირდება ψ -ზე რაიმე **სასაზღვრო პირობების** დადებას, ე.ი. ჩვენ თვითონ მოვითხოვთ ოპერატორის ერმიტულობას. ამის მაგალითად გამოდგება მომენტის

ოპერატორის z მდგენელი, $L_Z = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\varphi}$ პოლარულ φ კუთხეზე დამოკ-იდებულ კვადრატულად ინტეგრებად ფუნქციათა L^2 სივრცეში. ნებისმიერი ψ და χ ფუნქციებისათვის ნაწილობითი ინტეგრაცია გვაძლევს

$$\langle \chi, L_Z\psi \rangle = \langle L_Z\chi, \psi \rangle + \frac{\hbar}{i}\left[\overline{\chi}(2\pi)\psi(2\pi) - \overline{\chi}(0)\psi(0) \right] \quad (94)$$

ამიტომ L_Z არის ერმიტული, ოღონდ მისი დომენი შეზღუდულია ψ ფუნქციებით ისე, რომ $\psi(2\pi) = e^{i\alpha}\psi(0)$, სადაც α რაიმე რიცხვია.

ოპერატორები ჰილბერტის სივრცეში

ამ ნაწილში გადმოვცემთ ოპერატორების და მათი ერმიტულად შეუღლებულების ზუსტ განმარტებას, აგრეთვე ერმიტულ და თვითშეუღლებულ (ანუ ფიზიკურად დამზერად) ოპერატორებს.

შემდგომი განხილვა ეხება არა მარტო კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების ჰილბერტის სივრცეს, არამედ ნებისმიერ ჰილბერტის სივრცეს, რომელიც მისი იზომორფულია, ე.ი. ნებისმიერ კომპლექსურ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აქვს თვლადი უსასრულო ბაზისი; კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების ჰილბერტის სივრცეს განვიხილავთ მაგალითების სახით, როგორც მის რეალიზაციას.

ისევე, როგორც ფუნქციას $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ აქვს თავისი განსაზღვრის არე (დომენი) $D(f)\subset\mathscr{R}$, ჰილბერტის სივრცის A ოპერატორსაც $A:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ აქვს ასეთი დომენი.

განმარტება *1* . ოპერატორი ჰილბერტის $\mathscr{H}$ სივრცეში არის წრფივი ასახვა

$$A:\mathscr{D}(A)\to\mathscr{H} \quad (95)$$

$$\psi\to A\psi$$

სადაც $\mathscr{D}(A)$ აღნიშნავს *მკვრივ* წრფივ ქვესივრცეს $\mathscr{H}$ -ში. სწორედ ამ ქვესივრცეს ჰქვია A ოპერატორის განსაზღვრის **დომენი**.

მკვრივი ქვესივრცე ასე განიმარტება: განვიხილოთ სივრცის ქვესისტემა $\mathscr{H}_0$.ვიტყვით რომ $\mathscr{H}_0$ არის "მკვრივი $\mathscr{H}$ -ში", თუ $\mathscr{H}$ -ის ნებისმიერი წერტილის ყოველი მახლობლობა შეიცავს $\mathscr{H}_0$ -ის ელემენტს. ეს პირობა ნიშნავს, რომ თუ მოცემულია ნებისმიერი $\delta>0$ და ნებისმიერი $f\in\mathscr{H}$, ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $g\in\mathscr{H}_0$, რომ $\|f-g\|<\delta$.

მკაცრად რომ ვთქვათ, ჰილბერტის სივრცის ოპერატორი არის წყვილი $(A,\mathscr{D}(A))$, რომელიც შედგება ოპერაციის (მოქმედების) მიწერისგან ჰილბერტის სივრცეში, და სივრცის ქვესივრცისგან, რომელზეც ის მოქმედებს.

თუ B აღნიშნავს სხვა ოპერატორს ჰილბერტის სივრცეში (დომენით $\mathscr{D}(B)$), ვიტყვით, რომ A ოპერატორი უდრის B -ოპერატორს, თუ ორივე ფაქტორი – მოქმედება და განსაზღვრის დომენები ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. თუ

$$A\varphi = B\varphi,\ \text{ყველა}\ \varphi \in \mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(B), \quad (96)$$

ამ შემთხვევაში ვწერთ $A = B$.

ასე, რომ ორი ოპერატორი უნდა ჩავთვალოთ განსხვავებულად, თუ ისინი, თუმცა მოქმედებდნენ ერთნაირად, მაგრამ ჰქონდეთ სხვადასხვა დომენები.

ამ ბოლო სიტუაციის ტიპური მაგალითი წარმოიქმნება გარკვეულ ფიზიკურ ამოცანებში კომპაქტურ ან ნახევრად-უსასრულო ინტერვალებზე: ოპერატორის დომენი შეიზღუდება რაიმე სასაზღვრო პირობით, რომლის შერჩევა ნაკარნახევია ფიზიკური ამოცანით. ცხადია, რომ ორი არაეკვივალენტური ექსპერიმენტული გაზომვა საზოგადოდ, სხვადასხვა შედეგამდე მიგვიყვანს.. სინამდვილეში უამრავი გაუგებრობა, რომელზეც ქვემოთ გვექნება საუბარი, წარმოიქმნება ამ ფაქტის გამო.

სხვადასხვა ფიზიკური ოპერატორების მაგალითები

როგორც მაგალითი, განვიხილოთ სამი სხვადასხვა ოპერატორი ჰილბერტის სივრცეში $\mathscr{H} = L^2(\mathscr{R}, dx)$ და შემდეგ კიდევ სხვა, $L^2([0,1])$ სივრცეში.

(1ა) . ***მდებარეობის Q ოპერატორი*** ნაწილაკისა ნამდვილ ღერძზე არის გამრავლების ოპერატორი $\mathscr{H} = L^2(\mathscr{R}, dx)$ - ში:

$$(Q\psi)(x) = x\psi(x), \qquad \forall x \in \mathscr{R} \quad (97)$$

Q -ს განმარტების *მაქსიმალური არე* (მაქსიმალური დომენი) არის ის, რომელიც უზრუნველჰყოფს $Q\psi$ ფუნქციის არსებობას და კვლავ მიკუთვნებას ჰილბერტის

სივრცისადმი:

$$D_{\max}(Q)=\{\psi\in\mathcal{H}\,|\,Q\psi\in\mathcal{H}\}$$
$$=\left\{\psi\in L^2(\mathcal{R},dx)\,\middle|\,\|Q\psi\|^2\equiv\int_{\mathcal{R}}dxx^2\,|\psi(x)|^2<\infty\right\} \quad (98)$$

ცხადია, რომ ეს არის $L^2(\mathcal{R},dx)$-ის საკუთარი ქვესივრცე, რომელიც არის მკვრივი.

(1.ბ). ანალოგიურად, ***იმპულსის ოპერატორის*** $P=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ განმარტების მაქსიმალური დომენი $L^2(\mathcal{R},dx)$ ჰილბერტის სივრცეში არის

$$D_{\max}(P)=\{\psi\in L^2(\mathcal{R},dx)\,|\,\psi'\in L^2(\mathcal{R},dx)\} \quad (99)$$

(1გ). ზოგ გამოყენებებში მოსახერხებელია გვქონდეს გან-საკუთრებული დომენი, რომელიც რჩება ინვარიანტული ოპ-ერატორის მოქმედებით. Q-ოპერატორისთვის ასეთი დომენი მოიცემა *შვარცის სივრცით* $S(\mathcal{R})$, რომელიც არის სწრაფად დაცემადი ფუნქციების სივრცე.

გავიხსენოთ, რომ ფუნქცია $f:\mathcal{R}\to\mathcal{C}$, მიეკუთვნება $S(\mathcal{R})$-ს, თუ ის არის უსასრულოდ დიფერენცირებადი და, თვითონ და მისი წარმოებულები ეცემიან უსასრულობაში ნებისმიერი პოლინომიალის შებრუნებულზე სწრაფად. ეს ნიშ-ნავს, რომ $S(\mathcal{R})\subset\mathcal{D}_{\max}(Q)$ და

$$Q:S(\mathcal{R})\to S(\mathcal{R}) \quad (100)$$

შვარცის სივრცე წარმოადგენს აგრეთვე ინვარიანტულ დომენს იმპულსის ოპერატორისათვის $P=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ სივრცეში $L^2(\mathcal{R},dx)$, ანუ $P:S(\mathcal{R})\to S(\mathcal{R})$.

უკანასკნელ მაგალითში განხილული Q და P ოპერატორე-ბი განმარტების თანახმად განსხვავდებიან წინა ორ მაგალით-ში განხილულისგან. მაგრამ, როცა გვაქვს უსასრულო ინტერ-

ვალი, ეს განსხვავება ძირითადად მათემატიკურია, რადგან ფიზიკური გაზომვა არ იძლევა საშუალებას გავაკეთოთ განსხვავება ორ განსხვავებულ დომენს შორის. აქვე აღვნიშნოთ, რომ კვადრატულად ინტეგრებადობა უსასრულო ინტერვალში აუცილებლობით არ ნიშნავს, რომ ვექტორები ეცემოდნენ არგუმენტის დიდი მნიშვნელობისთვის.(როგორც ეს ზემოთ დავინახეთ)

განვიხილოთ ტალღური ფუნქციები φ და ψ, რომლებიც არიან კვადრატულად ინტეგრებადი $\mathscr{R}$ სივრცეში (ნამდვილ ღერძზე). ავიღოთ იმპულსის ოპერატორი $P=-i\hbar\frac{d}{dx}$. ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია გამოსახულებაში

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\overline{\varphi(x)}(P\psi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\overline{(P\varphi)}(x)\psi(x)-i\hbar\left[(\bar{\varphi}\psi)(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (101)$$

რადგან φ და ψ არიან კვადრატულად ინტეგრებადი, ჩვეულებრივ იხილავენ ფუნქციებს, რომლებიც ქრებიან, როცა $x\to\pm\infty$. ამიტომ ბოლო წევრი განულდება, ანუ P ოპერატორი გამოდის *ერმიტული.*

წინა მაგალითში ვიხილავდით იმპულსის ოპერატორის მაქსიმალურ დომენს,

$$D_{\max}(P)=\left\{\psi\in L^2(\mathscr{R},dx)\middle|\psi'\in L^2(\mathscr{R},dx)\right\} \quad (102)$$

ამ დომენს მიკუთნებულ ფუნქციებს ახასიათებს გარკვეული რეგულარობის თვისებები $\mathscr{R}$-ში და მათი წარმოებულიც უნდა იყოს კვადრატულად ინტეგრებადი. ამავე დროს, ისინი უნდა იყვნენ უწყვეტი და $x\to\pm\infty$ ზღვარში უნდა ნულდებოდნენ; ეს ნიშნავს, რომ P ოპერატორი $D_{\max}(P)$-ზე მოქმედი, არის *ერმიტული.* მაგრამ, ზემოხსენებული ფუნქცია, რომელიც შემოუსაზღვრელია უსასრულობაში, დიფერენცირებადია , თუმცა მისი წარმოებული არ არის კვადრატულად ინტეგრებადი, არ მიეკუთვნება $D_{\max}(P)$-ს. ანუ მოყვანილი ფუნქცია არ უზრუნველჰყოფს იმპულსის ოპერატორის ერმიტულობას. ეს არის პასუხი ზემოთ დასმულ კითხვაზე.

დომენის სხვა არჩევანია ***შვარცის სივრცე***, სადაც ფუნქციები, რომლებზეც P ოპერატორი მოქმედებს, ხასიათდება სწრაფი დაცემით უსასრულობაში.

განვიხილოთ აგრეთვე მაგალითი ნაწილაკისა შემოსაზღვრულ ინტერვალში, [0,1].

ამ შემთხვევაში ტალღურმა ფუნქციამ საზოგადოდ, უნდა დააკმაყოფილოს რაიმე სასაზღვრო პირობები, რომლებიც აუცილებლად უნდა მივიღოთ მხედველობაში. მაგალითად, უსასრულო სწორკუთხა ორმოსთვის P-ს დომენი, ბუნებრივად, შეიძლება იყოს

$$\mathscr{D}\left(P\right)=\left\{\psi\in\mathscr{H}\left|\psi'\in\mathscr{H};\quad\psi\left(0\right)=0=\psi\left(1\right)\right.\right\}\quad(103)$$

მოკლედ რომ ვთქვათ, მივდივართ კვანტური ოპერატორის მათემატიკურ და ფიზიკურ თვისებებთან.

ოპერატორის ერმიტული შეუღლება

ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორის ცნება შემოტანილი გვქონდა ადრე,

$$\left\langle A\varphi\middle|\psi\right\rangle=\left\langle\varphi\middle|A^{+}\middle|\psi\right\rangle$$

დომენების სპეციფიკა ასრულებს კრიტიკულ როლს, როდესაც შემოგვაქვს ჰილბერტის სივრცის A ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი A^{+}: შემოუსაზღვრელი ოპერატორებისთვის დომენების განხილვა უპირველეს ინტერესს წარმოადგენს. რომ არსებობდეს A ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი A^{+}, ეს უკანასკნელი ისე უნდა იყოს განმარტებული $\mathscr{H}$-ში, რომ მისი დომენი $\mathscr{D}\left(A\right)$ იყოს მკვრივი $\mathscr{H}$-ში.

განმარტება *2:* A-ოპერატორისთვის $\mathscr{H}$-ში შეუღლებული A^{+}-ოპერატორის დომენი განიმარტება შემდეგნაირად

$$\mathscr{D}\left(A^{+}\right)=\left\{\varphi\in\mathscr{H}\left|\exists\tilde{\varphi}\in\mathscr{H};\quad\left\langle\varphi,A\psi\right\rangle=\left\langle\tilde{\varphi},\psi\right\rangle,\quad\forall\,\psi\in\mathscr{D}\left(A\right)\right.\right\}$$

(აქ $\tilde{\varphi}$ ვექტორი დამოკიდებულია ორივეზე A და φ). როცა $\varphi\in\mathscr{D}\left(A^{+}\right)$, განვმარტავთ $A^{+}\varphi=\tilde{\varphi}$, ე.ი. $\left\langle\varphi,A\psi\right\rangle=\left\langle A^{+}\varphi,\psi\right\rangle$

ყველა $\psi \in \mathscr{D}(A)$ -სთვის.

როგორც მაგალითი, კვლავ განვიხილოთ ჰილბერტის სივრცე $L^2([0,1])$ და იმპულსის ოპერატორი დომენით

$$\mathscr{D}(P) = \left\{\psi \in \mathscr{H} \middle| \psi' \in \mathscr{H}; \quad \psi(0) = 0 = \psi(1)\right\} \quad (104)$$

ამ განმარტების თანახმად P^+ -ოპერატორის დომენი მოიცემა ასე:

$$\mathscr{D}(P^+) = \left\{\varphi \in \mathscr{H} \middle| \exists \tilde{\varphi} \in \mathscr{H}; \quad \langle \varphi, P\psi \rangle = \langle \tilde{\varphi}, \psi \rangle, \ \psi \in \mathscr{D}(P)\right\} \quad (105)$$

ხოლო P^+ ოპერატორს მიეწერება თანაფარდობა
$\langle \varphi, P\psi \rangle = \langle P^+\varphi, \psi \rangle$, ყველა $\psi \in \mathscr{D}(P)$ -სთვის.
ნაწილობითი ინტეგრაცია გვაძლევს

$$\int_0^1 dx \left(\bar{\varphi} P\psi - \overline{\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d\varphi}{dx} \right)} \psi \right)(x) = \frac{\hbar}{i} \left[\overline{\varphi(1)} \psi(1) - \overline{\varphi(0)} \psi(0) \right] = 0, \quad (106)$$

ეს თანაფარდობა გვეუბნება, რომ $\psi \in \mathscr{D}(P)$ -ს მიერ სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილება საკმარისია ზედაპირული წევრის განულებისთვის და გვიჩვენებს, რომ P^+ ისევე მოქმედებს, როგორც P. ამიტომ

$$P^+ = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}, \qquad \mathscr{D}(P^+) = \left\{\varphi \in \mathscr{H} \middle| \varphi' \in \mathscr{H}\right\}$$

ამრიგად, P^+ ***-ის დომენი არის უფრო ფართო, ვიდრე*** P ***-სი:*** $D(P) \subset D(P^+)$.

კვანტურ თეორიაში დაკვირვებადი ფიზიკური სიდიდეები (დამზერადები) აღიწერება ჰილბერტის სივრცის თვითშეუღლებული ოპერატორებით. როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ, თვითშეუღლებულობასა და ერმიტულობას შორის არის ფაქიზი განსხვავება, როცა ეს ოპერატორები მოქმედებენ უსასრულო განზომილების ჰილბერტის სივრცეებში და ეს განსხვავება არსებითია კვანტურ მექანიკაში.

განმარტება *3:* A ოპერატორი ერმიტულია $\mathscr{H}$ -ში, თუ

$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle$, ყველა $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(A)$ -სთვსის,

ანუ $A^{+}\varphi = A\varphi$, ყველა $\varphi \in \mathscr{D}\left(A\right)$ (107)

(სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, A **ოპერატორი ერმიტუ-ლია**, თუ A^{+} მოქმედებს იგივენაირად, როგორც A ყველა ვექტორზე A-ს დომენიდან, თუმცა A^{+} უნდა განისაზღვროს უფრო ფართო ქვესივრცეში).

A **ოპერატორი $\mathscr{H}$ -ში არის თვითშეუღლებული**, თუ ის თანხ-ვდება მის შეუღლებულს, ე.ი $A^{+}\varphi = A\varphi$ და $D\left(A\right) = D\left(A^{+}\right)$, ყველა $\varphi \in \mathscr{D}\left(A\right)$-სთვის.

ჩვენ ვნახეთ, რომ P ისევე მოქმედებს, როგორც P^{+}, მაგრამ მისი დომენი მკაცრად ნაკლებია P^{+}-ის დომენ-ზე: $D\left(P\right) \subset D\left(P^{+}\right)$, ოღონდ $D\left(P\right) \neq D\left(P^{+}\right)$. ამ ფაქტიდან ვასკვნით, რომ P არის ერმიტული, მაგრამ არ არის თვით-შეუღლებული: $P \neq P^{+}$.

ამრიგად, *ყველა თვითშეუღლებული ოპერატორი არის ერ-მიტული, მაგრამ ერმიტული ოპერატორი არ არის აუცილებ-ლად თვითშეუღლებული.*

ეს ფაქიზი განსხვავება მეტად მნიშვნელოვანია, რადგან თუ ჰილბერტის სივრცეში A ოპერატორი არის თვითშეუღლე-ბული, მაშინ მისი სპექტრი არის ნამდვილი, ხოლო საკუთარი ვექტორები, რომლებიც შეესაბამებიან სხვადასხვა საკუთარ მნიშვნელობებს, არიან ურთიერთორთოგონალური; უფრო მეტიც, საკუთარი ვექტორები ქმნიან სრულ სისტემას ჰილ-ბერტის სივრცეში.

დამზერადები კვანტურ მექანიკაში და თვითშეუღლებულობის მნიშვნელობა

ფიზიკური სისტემების დაკვანტვა მოითხოვს დაკვირვებადი (დამზერადი) სიდიდეების კორექტულ განმარტებას (როგორებიც არიან, ჰამილტონიანი, იმპულსი, და ა.შ.), როგორც თვითშეუღლებული ოპერატორებისა, შესაბამის ჰილბერტის სივრცეში და მათ სპექტრალურ ანალიზს.

კვანტური მექანიკის მათემატიკური აპარატი არის ფუნქციონალური ანალიზი, უფრო ზუსტად, წრფივი ოპერატორების თეორია ჰილბერტის სივრცეში. ეს საკმარისად ფაქიზი დარგია და მოითხოვს ბევრი დეტალის ღრმა ცოდნას. ამ მიზეზით კვანტური მექანიკის სტანდარტული სახელმძღვანელოები ძირითადად გვერდს უვლიან მათემატიკურ სიმკაცრეს და გადმოსცემენ გარკვეული დოზით გამარტივებულ ვერსიებს. ეს ვერსიები ემყარება სასრულო განზომილების წრფივ ალგებრაში გამოყენებულ გამოცდილებას, რაც ხანდახან შეიძლება აღმოჩნდეს არასაკმარისი და მიგვიყვანოს მთელ რიგ პარადოქსებთან.

დამზერადი სიდიდეები, როგორც წესი, წარმოიდგინებიან ერმიტული მატრიცებით, რომლებსაც აქვთ ბევრი მნიშვნელოვანი თვისება, როგორიცაა, მაგალითად, საკუთარი ვექტორების ორთოგონალურობა, საკუთარი მნიშვნელობების ნამდვილობა, სისრულე ანუ მთელი სასრულ-განზომილებიანი ჰილბერტის სივრცის მოჭიმვა და ა. შ. მაგრამ, ყველა ეს თვისება შეიძლება არ მუშაობდეს ზოგად უსასრულო-განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეში, სადაც *ერმიტულობის თვისება იცვლება სიმეტრიულობის პირობით, რომელიც განაპირობებს დამზერადი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობების ნამდვილობას, თუმცა დანარჩენი თვისებები შეიძლება გაგებულ იქნას უფრო ფაქიზი პირობის დადებით, რასაც უწოდებენ თვითშეუღლებულობას.*

ყველაზე კრიტიკული პრობლემა არის შემოუსაზღვრელი თვითშეუღლებული (თშ) ოპერატორები, რომლებიც ვერ განიმარტება მთელ ჰილბერტის სივრცეში, ანუ მათ არ შეუ-

ძლიათ იმოქმედონ ნებისმიერ კვანტურ-მექანიკურ მდგომარეობაზე. უნდა გამოვიჩინოთ სიფრთხილე, რადგან ოპერატორი მისი განსაზღვრის არის (დომენის) გარეშე არ არის კარგად განმარტებული.

შემოუსაზღვრელი სიმეტრიული ოპერატორების თვითშეუღლებული გაფართოების თეორია ასრულებს გადამწყვეტ როლს.

კვანტურ მექანიკაში ფიზიკურად დამზერადი სიდიდეები აღიწერებიან ჰილბერტის სივრცის ოპერატორებით, რომლებიც არიან თვთშეუღლებული. თუმცა ფიზიკის უამრავ სახემძღვანელოში თვითშეუღლებულის ცნება ერმიტულის სინონონიმად გამოიყენება, რომლებიც მოქმედებენ უსასრულო განზომილების ჰილბერტის სივრცეში. შემდგომში ვნახავთ მათ შორის არსებული განსხვავების გავლენას კვანტურ ფიზიკაზე.

(სხვა სიტყვებით, A ოპერატორი ერმიტულია, თუ A^{+} მოქმედებს ისევე, როგორც A ყველა ვექტორზე, რომლებიც მიეკუთვნება $\mathcal{D}(A)$-ს, თუმცა სინამდვილეში A^{+} უნდა განისაზღვროს უფრო ფართო არეში, ვიდრე არის $\mathcal{D}(A)$)

*A ოპერატორი $\mathcal{H}$-ში არის **თვითშეუღლებული**, თუ A და A^{+} თანხვდება ერთმანეთს $\left(A = A^{+}\right)$, ანუ, ცხადი სახით, თუ*

$$A^{+}\varphi = A\varphi \text{ და } \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}\left(A^{+}\right) \text{ ყველა } \varphi \in \mathcal{D}(A)\text{-სთვის.} \quad (108)$$

ამიტომ, ნებისმიერი თვითშეუღლებული ოპერატორი არის ერმიტული, მაგრამ ერმიტული ოპერატორისთვის არ არის სავალდებულო იყოს თვითშეუღლებული. ჩვენი წინა შედეგი გვიჩვენებს ამ უკანასკნელ ფაქტს. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ P და P^{+} ოპერატორები მოქმედებენ ერთნაირად, მაგრამ P^{+}-ის დომენი არის მკაცრად ფართო, ვიდრე P-სი: $\mathcal{D}(P) \subset \mathcal{D}\left(P^{+}\right)$, ამასთან $D(P) \neq D\left(P^{+}\right)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ P ოპერატორი არის ერმიტული, მაგრამ არ არის თვითშეუღლებული: $P \neq P^{+}$.

ეს განსხვავება არსებითია სპექტრალური თვისებების მი-

ხედვით: თუ ჰილბერტის სივრცის ოპერატორი A არის თვით-შეუღლებული, მაშინ მისი სპექტრი ნამდვილია და საკუთარი ვექტორები განსხვავებული საკუთარი მნიშვნელობებით არიან ურთიერთორთოგონალური. უფრო მეტიც, საკუთარი ვექტორები განზოგადებულ საკუთარ ვექტორებთან ერთად ადგენენ ვექტორთა *სრულ სისტემას* ჰილბერტის სივრცეში.

ეს შედგები არ ვრცელდება ოპერატორებზე, რომლებიც არიან მხოლოდ ერმიტული. სისტემის სისრულე არის, მეტადრე ფუნდამენტალური თვისება დამზერადი სიდიდეების ფიზიკური ინტერპრეტაციისთვის. კვანტური მექანიკის სახელმძღვანელოებში (მაგ.,მესია) დამზერადი განიმარტება როგორც "ერმიტული ოპერატორი, რომლის ორთონორმალური საკუთარი ვექტორები ადგენენ ბაზისს ჰილბერტის სივრცეში". ამ მიდგომის ნაკლზე შევნიშნოთ მხოლოდ შემდეგი: მოცემული ჰილბერტის სივრცის ოპერატორისთვის ჩვეულებრივად ადვილია შემოწმდეს, არის თუ არა ის ერმიტული (მაგ. ნაწილობრივი ინტეგრაციის ჩატარებით). თავის მხრივ, ერმიტული ოპერატორისთვისაც არსებობს თვითშეუღლებულობის მარტივი კრიტერიუმი, რასაც აგრეთვე განვიხილავთ.

შევნიშნოთ, რომ უკვე მოყვანილი განმარტებები ძალაში რჩება, თუ ჰილბერტის სივრცე არის სასრულ-განზომილებიანი. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს *გამარტივებულ* შედეგებს:

- A ოპერატორი $\mathscr{H}$ სივრციდან (რომელიც შეიძლება ახლა წარმოვადგინოთ კომპექსური $n\times n$ მატრიცის სახით) და მისი შეუღლებული (ე.ი. ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა) განისაზღვრება მთელ ჰილბერტის სივრცეში, ე.ი. $\mathscr{D}(A)=\mathscr{H}$
- ერმიტულობა და თვითშეუღლებულობა სინონიმებია და
- A-ს სპექტრი არის მისი ყველა საკუთარი მნიშვნელობების სისტემა, ე.ი. გვაქვს სუფთად დისკრეტული სპექტრი.

დამზერადები და განზოგადებული საკუთარი ფუნქციები, შვარცის სივრცე

როდესაც შემოვიტანეთ მდებარეობის და იმპულსის დამზერადები ნამდვილ ღერძზე მოძრავი ნაწილაკისათვის, მივუთითეთ, რომ ისინი არ არიან განმარტებული მთელ ჰილბერტის სივრცეში, არამედ მხოლოდ მის საკუთარ ქვესივრცეში. ახლა განვიხილავთ კვანტურ მექანიკური დამზერადების ზოგიერთ მთავარ თვისებას.

ორი ტექნიკური დეტალი არის აღსანიშნავი:

(i) თუ A ოპერატორის სპექტრი არ არის შემოსაზღვრული (შემოუსაზღვრელია), მაშინ მისი დომენი არ შეიძლება იყოს მთელი $\mathcal{H}$.

(ii) თუ A-ს სპექტრი შეიცავს უწყვეტ ნაწილს, მაშინ შესაბამისი საკუთარი ვექტორები არ მიეკუთვნებიან $\mathcal{H}$-ს, არამედ უფრო დიდ სივრცეს.

გავერკვეთ ახლა ამ ორ პრობლემაში.

შემოუსაზღვრელი ოპერატორები: ოპერატორთა უმარტივესი კლასია*შემოსაზღვრული* ოპერატორები: თუ ყველა ვექტორისათვის $\psi \in \mathcal{D}(A)$, გვაქვს

$$\|A\psi\| \le c\|\psi\|, \text{ სადაც } c \ge 0 \text{ მუდმივია,} \quad (109)$$

მაშინ ოპერატორს ვუწოდებთ *შემოსაზღვრულს.* ასევე, მისი სპექტრიც შემოსაზღვრულია. ასეთი ოპერატორები ყოველთვის შეიძლება განიმარტოს მთელ ჰილბერტის სივრცეში, ე.ი. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. მნიშვნელოვანი მაგალითია უნიტარული ოპერატორი $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. ასეთი ოპერატორი შემოსაზღვრულია, რადგან ის ინახავს ნორმას ($\|U\psi\| = \|\psi\|$, ყველა $\psi \in \mathcal{H}$-სათვის), ამიტომ (109) პირობა კმაყოფილდება. მისი სპექტრი ძევს ერთეულოვან წრეწირზე კომპლექსურ სიბრტყეში და ამიტომ შემოსაზღვრულია. მისი ფურიე წარმოდგენის ოპერატორის სპექტრი დისკრეტულია $\{\pm 1, \pm i\}$.

გავიხსენოთ

ჰელინგერ-ტეპლიცის თეორემა:

A იყოს ოპერატორი $\mathscr{H}$ -ში, განსაზღვრული ყველგან და აკმაყოფილებდეს ერმიტულობის პირობას

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{H} \quad (110)$$

მაშინ A შემოსაზღვრულია.

მიუხედავად ამისა, კვანტურ მექანიკაში გვხვდება ოპერატორები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ერმიტულობის (110) პირობას მათი განსაზღვრის დომენებში. მაგრამ მათი *სპექტრი* არ არის შემოსაზღვრული. მართლაც, კანონიკური კომუტაციური თანაფარდობა, თუმცა ადებს რაიმე ფუნდამენტურ შეზღუდვას, არის შემოუსაზღვრელი, როგორც ქვემოთ დავინახავთ პარადოქსების გარჩევისას. მოყვანილი თეორემა აჩვენებს, რომ შეუძლებელია განისაზღვროს ეს ერმიტული ოპერატორები მთელ ჰილბერტის სივრცეში და რომ მათი დომენები *აუცილებლობით* წარმოადგენენ $\mathscr{H}$ -ის ქვესივრცეებს, რომლებიც დასაშვებია მათემატიკური თვალსაზრისით, ზოგი მათგანი კი მოითხოვება ფიზიკის საჭიროებით (მაგ., სასაზღვრო პირობებით, და ა.შ.).

როგორც მაგალითი, განვიხილოთ *მდებარეობის ოპერატორი* Q, განსაზღვრული შვარცის სივრცეში $\mathcal{S}(\mathscr{R})$.

შვარცის სივრცე:

ეს ოპერატორი არის ერმიტული, რადგან ყველა ვექტორი $\phi, \psi \in S(\mathscr{R})$ აკმაყოფილებს პირობას

$$\langle \varphi, Q\psi \rangle = \int_R dx \overline{\varphi}\, x\psi = \int_R dx \overline{x\varphi}\, \psi = \langle Q\varphi, \psi \rangle \quad (111)$$

ამ ოპერატორის სპექტრი არის მთელი ნამდვილი ღერძი (რაც გამოხატავს იმას, რომ Q არ არის შემოსაზღვრული). ამ კერძო ოპერატორისთვის უკვე ცხადად შევნიშნეთ, რომ

შეუძლებელია განვსაზღვროთ ის ჰილბერტის სივრცის ყველა ვექტორზე. საუკეთესო შემთხვევაში, ის შეიძლება განვმარტოთ მის მაქსიმალურ დომენზე, რომელიც არის ჰილბერტის სივრცის არატრივიალური ქვესივრცე.

$\mathcal{S}(\mathcal{R})$ სივრცეზე განმარტებული Q ოპერატორი მაგალითია საკუთარი ვექტორისა, რომელიც უკავშირდება თვითშეუღლებული ოპერატორის უწყვეტ სპექტრს და არ მიეკუთვნება ჰილბერტის სივრცეს. მაგრამ ის შეიძლება გავხადოთ თვითშეუღლებული დომენის გაფართოებით. ასეთ ოპერატორებს უწოდებენ **არსებითად თვით-შეუღლებულს**.

მართლაც, ψ_{x_0} საკუთარი ფუნქცია, დაკავშირებული x_0 საკუთარ მნიშვნელობასთან განიმარტება თანაფარდობით

$$\left(Q\psi_{x_0}\right)(x) = x_0\psi_{x_0}(x); \qquad \left(x_0 \in R, \psi_{x_0} \in S(R), \psi_{x_0} \neq 0\right) \quad (112)$$

ანუ,

$$\left(x - x_0\right)\psi_{x_0}(x) = 0, \qquad x \in R$$

ეს პირობა ნიშნავს, რომ $\psi_{x_0}(x) = 0$, ყველა $x \neq x_0$-სათვის. ამრიგად, ψ_{x_0} ქრება თითქმის ყველგან და წარმოადგენს ნულ ვექტორს $L^2(\mathcal{R}, dx)$-ში. ამიტომ Q ოპერატორს არ აქვს რაიმე საკუთარი მნიშვნელობა: მისი დისკრეტული სპექტრი ცარიელია.

იგივეა სიტუაცია P ოპერატორისათვის $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ სივრცეში, რომელიც აგრეთვე არის *არსებითად თვითშეუღლებული*: საკუთარ მნიშვნელობათა განტოლებას

$$(P\psi_p)(x) = p\psi_p(x); \qquad \left(p \in \mathcal{R}, \psi_p \in S(\mathcal{R}), \psi_p \neq 0\right)$$

აქვს ამოხსნა $\psi_p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\dfrac{ipx}{\hbar}\right)$, მაგრამ $\psi_p \notin \mathcal{S}(\mathcal{R})$. ამიტომ P-ს არ გააჩნია რაიმე საკუთარი მნიშვნელობა.

მეორე მხრივ, ეს ოპერატორები უშვებენ სუსტ (განზოგადებულ) ამონახსნებს. მაგ., დირაკის ფუნქციას x_0 მატარებლით $\delta_{x_0}(x) \equiv \delta(x - x_0)$. იმისათვის, რომ შევამოწმოთ გან-

ტოლება $x\delta_{x_0}(x)=x_0\delta_{x_0}(x)$ განზოგადებული ფუნქციის თვალსაზრისით, უნდა განვიხილოთ ეს თანაფარდობა საცდელ ფუნქციასთან $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ ერთად:

$$\int_R dxx\delta_{x_0}(x)\varphi(x)=x_0\varphi(x_0)=\int_R dxx_0\delta_{x_0}(x)\varphi(x) \quad (113)$$

დირაკის ფუნქცია და განზოგადებული ფუნქცია $x\delta_{x_0}$ არ მიეკუთვნებიან Q-ს დომენს $\mathcal{S}(\mathcal{R})$-ში, არამედ მიეკუთვნებიან მის დუალურ სივრცეს

$\mathcal{S}'(\mathcal{R})=\{\omega:\mathcal{S}(\mathcal{R})\to\mathcal{C}\}$, ($\mathcal{C}$ -წრფივი და უწყვეტია)

ანუ ზომიერად განზოგადებული ფუნქციების სივრცეს $\mathcal{R}$ -ში (tempered distributions), რომლებიც აბსტრაქტულად და მკაცრად განისაზღვრებიან ასე

$$\begin{aligned}&\delta_{x_0}: \quad S(R)\to\mathcal{C}\\&\varphi\to\delta_{x_0}(\varphi)=\varphi(x_0)\end{aligned} \quad (114)$$

და

$$\begin{aligned}&x\delta_{x_0}: \quad S(R)\to\mathcal{C}\\&\varphi\to(x\delta_{x_0})(\varphi)=\delta_{x_0}(x\varphi)=x_0\varphi(x_0)\end{aligned}$$

ამ განმარტებებით, (113) იღებს ზუსტ სახეს

$$(x\delta_{x_0})(\varphi)=(x_0\delta_{x_0})(\varphi), \qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathcal{R})$$

ამიტომ განტოლება $Q\psi_{x_0}=x_0\psi_{x_0}$ უშვებს განზოგადებულ ამოხსნას ψ_{x_0} ყველა $x_0\in\mathcal{R}$-ისთვის. და რადგან არსებითად თვითშეუღლებული Q ოპერატორისთვის სპექტრი არის ყველა ნამდვილი რიცხვი, რომლისთვისაც განტოლება უშვებს ან $\psi\in\mathcal{D}(Q)=\mathcal{S}(Q)$ (*დისკრეტული სპექტრი*) ან განზოგადებულ ფუნქციას $\psi\in\mathcal{S}'(\mathcal{R})$ (*უწყვეტი სპექტრი*), შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $SpQ=\mathcal{R}$ და Q-ს სპექტრი არის სუფთად უწყვეტი.

ანალოგიურად, ფუნქცია $\psi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(ipx/\hbar)$ გან-

საზღვრავს განზოგადებულ ფუნქციას l_p ასეთნაირად:

$$l_p : S(\mathscr{R}) \to \mathscr{C}$$
$$\varphi \to l_p(\varphi) = \int_{\mathscr{R}} dx \overline{\psi_p(x)} \varphi(x) = (\mathscr{F}\varphi)(p)$$

ფურიე ასახვისათვის,
$Pl_p = pl_p$ განტოლების ამოხსნა ნიშნავს შემდეგს:

$$(Pl_p)(x) = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{dl_p}{dx}\right)(\varphi) = l_p\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(F\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi}{dx}\right)\right)(p) =$$
$$= p(F\varphi)(p) = pl_p(\varphi)$$

საიდანაც გამოდის, რომ $SpP = \mathscr{R}$ (სუფთად უწყვეტი სპექტრი)

ამ ოპერატორების საკუთარ მნიშვნელობათა პრობლემა, რაც უშვებს უწყვეტ სპექტრს, დადის ***გელფანდის ტრიპლეტის*** განხილვაზე (აღჭურვილი (Rigged) ჰილბერტის სივრცე)

$$S(R) \subset L^2(R, dx) \subset S'(R)$$

(მკაცრი დასაბუთება ხდება ტალღური პაკეტების გამოყენებით)

აღჭურვილი ჰილბერტის სივრცეები

წრფივი ალგებრის ერთ-ერთი ძირითადი შედეგი მდგომარეობს თეორემაში იმის შესახებ, რომ ნებისმიერ თვითშეუღლებულ წრფივ A ოპერატორს n-განზომილებიან ევკლიდის სივრცეში $\mathscr{R}_n$ აქვს საკუთარი ვექტორების სრული სისტემა. ეს თეორემა ამბობს, რომ თუ A არის თვითშეუღლებული ოპერატორი n-განზომილებიან ევკლიდის სივრცეში $\mathscr{R}_n$, მოიძებნება ორთონორმირებული ბაზისი $e_1, \dots, e_n$, რომლის ყველა ვექტორი არის A ოპერატორის საკუთარი ვექტორი: $Ae_k = \lambda_k e_k$, სადაც λ_k არის ნამდვილი რიცხვი. ნებისმიერი f ვექტორი

$\mathcal{R}_n$ სივრციდან გაიშლება ამ ბაზისში ასე: $f = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$, ხოლო ოპერატორს ჩავწერთ ასე:

$$Af = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\langle f, e_k \right\rangle e_k \quad (115)$$

ანალოგიური ითქმის უნიტარულ ოპერატორებზეც იმ განსხვავებით, რომ λ_k არის კომპლექსური რიცხვი, მოდულით ერთი.

საქმე რთულდება უსასრულო განზომილების სივრცეზე გადასვლისას. მაგალითად, ჰილბერტის სივრცეში არსებობენ უნიტარული ოპერატორები ($\|Uf\| = \|f\| = \|U^{-1} f\|$), რომელთაც არ აქვთ ნულისგან განსხვავებული არც ერთი ვექტორი.

მაგალითი: ასეთი ოპერატორის მაგალითი შეიძლება იყოს წანაცვლების ოპერატორი U_h ჰილბერტის სივრცეში $L^2(\mathcal{R}, dx)$ წრფეზე კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციებით. მართლაც, ავილოთ ასეთი ფუნქცია ამ სივრციდან

$$U_h f(x) \equiv f(x-h) = af(x)$$

რადგან $f(x-h)$-ის ფურიე სახე არის $e^{i\lambda h} F(\lambda)$, სადაც $F(\lambda) = \int f(x) e^{i\lambda x} dx$, წინა ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$e^{i\lambda h} F(\lambda) = aF(\lambda)$$

მაგრამ ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $F(\lambda)$ ფუნქცია ნულის ტოლია წერტილებში, სადაც $e^{i\lambda x} \neq a$, ანუ ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ თვლადი სიმრავლის წერტილებზე. რადგან $F(\lambda)$-ს აქვს ინტეგრირებული მოდულის კვადრატი, ვღებულობთ, რომ $F(\lambda)$=0. ამრიგად, U_h ოპერატორს არ გააჩნია საკუთარი მნიშვნელობები $L^2(\mathcal{R}, dx)$ სივრცეში. მიუხედავად ამისა, ადვილად ვიპოვით ფუნქციებს, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან $L^2(\mathcal{R}, dx)$ სივრცეს და არიან წანაცვლების ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები. მაგალითად, $U_h e^{-i\lambda x} = e^{i\lambda h} e^{-i\lambda x}$, ე.ი. $e^{-i\lambda x}$ არის U_h- ოპერატორის საკუთარი

ფუნქცია, რომელსაც შეესაბამება საკუთარი მნიშვნელობა $e^{i\lambda h}$. ამავე დროს, როგორც ცნობილია, ნებისმიერი f-ფუნქცია $L^2\left(\mathcal{R},dx\right)$-დან შეიძლება გავშალოთ $e^{-i\lambda x}$-ფუნქციების მიხედვით:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int F\left(\lambda\right)e^{-i\lambda x}d\lambda ,$$

სადაც

$$F\left(\lambda\right)=\int f\left(x\right)e^{i\lambda x}dx ,$$

ხოლო წანაცვლების ოპერატორის მოქმედება გამოიხატება ტოლობით

$$U_h f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\lambda h}F\left(\lambda\right)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\lambda h}\left[\int f\left(\xi\right)e^{i\lambda\xi}d\xi\right]e^{i\lambda x}d\lambda$$

საკუთარ ფუნქციათა სისტემა სრულია, რადგან ნებისმიერი ფუნქციისათვის ადგილი აქვს პლანშერელის ტოლობას

$$\int\left|f\left(x\right)\right|^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int F\left(\lambda\right)d\lambda \quad (116)$$

ამრიგად, დავინახეთ, რომ თუმცა U_h ოპერატორს არ აქვს საკუთარი ფუნქციები, რომლებიც ძევს თვითონ $L^2\left(\mathcal{R},dx\right)$ სივრცეში, მას აქვს სრული სისტემა საკუთარი ფუნქციებისა, რომლებიც ძევს *ამ სივრცის გარეთ*. ანალოგიური სიტუაცია წარმოიქმნება სხვა ოპერატორებისთვისაც (მაგალითად, ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორისთვის, რომლის საკუთარი ფუნქცია არის $\delta\left(x-h\right)$). ამ ფუნქციების განხილვა მხოლოდ ჰილბერტის კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციების კატეგორიებით, არის შეუძლებელი. შეიძლება ჩვენება, რომ ასეთი განხილვა ხდება შესაძლებელი, თუ თვით ჰილბერტის სივრცესთან ერთად განვიხილავთ მის რაიმე გაფართოებას.

როგორც წესი, ჰილბერტის სივრცეები წარმოიშვება წრფივი Φ სივრცის განხილვისას, რომელშიც მოცემულია დადებითად განსაზღვრული ერმიტული ბიწრფივი ფუნქციონალი $\left(\phi,\psi\right)$. თუ $\left(\phi,\psi\right)$-ს ჩავთვლით სკალარულ ნამრავლად Φ-ში, მიიღება სათანადო ჰილბერტის სივრცე $\mathcal{H}$. ამის შემდეგ ჩვეულე-

ბრივ ივიწყებენ Φ სივრცის შესახებ, საიდანაც მივიღეთ ჰილ-ბერტის სივრცე და სწავლობენ თვითონ ჰილბერტის სივრცეს. მაგრამ, სწორედ რომ ერთდროული განხილვა Φ სივრცისა და მისი შევსებით მიღებული ჰილბერტის $\mathscr{H}$ სივრცისა სა-შუალებას გვაძლევს განვმარტოთ ჰილბერტის სივრცის გარეთ მდებარე "საკუთარი ფუნქციები".

მაგალითად, $e^{-i\lambda x}$ ფუნქციები შეგვიძლია განვიხილოთ რო-გორც წრფივი S ფუნქციონალები შვარცის სივრცეში, რომ-ლებიც სწრაფად ეცემიან ნამდვილ ღერძზე ნებისმიერი რიგის წარმოებულებთან ერთად. $L^2\left(\mathscr{R},dx\right)$ სივრცე მიიღება S-ის-გან, თუ მას შევავსებთ სკალარული ნამრავლით

$$\left(\phi,\psi\right)=\int\overline{\psi\left(x\right)}\phi\left(x\right)dx$$

ამრიგად, U_h ოპერატორის საკუთარი ვექტორები, რომ-ლებიც არ მიეკუთვნებიან $L^2\left(\mathscr{R},dx\right)$ სივრცეს, სხვა არაფერია, თუ არ წრფივი ფუნქციონალები S-წრფივ სივრცეში, რომელ-იც ჩადგმულია $L^2\left(\mathscr{R},dx\right)$ სივრცეში.

განმარტება: A იყოს წრფივი ოპერატორი წრფივ ტოპოლო-გიურ სივრცეში Φ. ამ ოპერატორის განზოგადებული საკუ-თარი ვექტორი, რომელიც ეთანადება საკუთარ მნიშვნელობას λ, ეწოდება ისეთ ფუნქციონალს Φ სივრცეში, რომ

$$F\left(A\phi\right)=\lambda F\left(\phi\right), \quad (117)$$

ყველა ელემენტისთვის Φ სივრციდან.

ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $e^{-i\lambda x}$ ფუნქციები არიან S სივრცეში განხ-ილული წანაცვლების ოპერატორის განზოგადებული საკუთარი ვექტორები. ფურიე გარდაქმნა $F\left(\lambda\right)$ სხვა არაფერია, თუ არა $\left(e^{-i\lambda x},\phi\left(x\right)\right)$ ფუნქციონა-ლის მნიშვნელობა . პლანშერელის პირობის თანახმად, განზოგადებულ საკუ-თარ $e^{-i\lambda x}$ ფუნქციათა სიმრავლე არის სრული, ე.ი. ტოლობიდან $F\left(\lambda\right)=0$, გამომდინარეობს, რომ $\phi\left(x\right)=0$.

ᲐᲚᲭᲣᲠᲕᲘᲚᲘ (ᲒᲐᲜᲖᲝᲒᲐᲓᲔᲑᲣᲚᲘ) ᲰᲘᲚᲑᲔᲠᲢᲘᲡ ᲡᲘᲕᲠᲪᲔᲔᲑᲘ.

ვთქვათ, თვლად ჰილბერტის სივრცეში Φ განსაზღვრულს სკალარული ნამრავლით $(\phi,\psi)_n$ მოცემულია კიდევ ერთი სკალარული ნამრავლი, ე.ი. დადებითად განსაზღვრული გადაუგვარებელი ერმიტული ფუნქციონალი (ϕ,ψ). ამრიგად, ყოველ ორ ელემენტს ϕ და ψ ეთანადება კომპლექსური რიცხვი (ϕ,ψ), ისეთი, რომ

1) $(\phi_1+\phi_2,\psi)=(\phi_1,\psi)+(\phi_2,\psi)$

2) $(\alpha\phi,\psi)=\alpha(\phi,\psi)$

3) $(\phi,\psi)=\overline{(\psi,\phi)}$,

4) $(\phi,\phi)\geq 0$, ამასთან $(\phi,\phi)=0$, მარტო მაშინ, თუ $\phi=0$

5) თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n=\phi$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}(\phi_n,\psi)=(\phi,\psi)$

3) და 5) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}(\psi,\phi_n)=(\psi,\phi)$. 5)-დან გამომდინარეობს, რომ (ϕ,ψ) უწყვეტია რაიმე ნორმის $\|\phi\|_m=\sqrt{(\phi,\phi)_m}$ მიმართ Φ სივრცეში.

შეგვიძლია ავაგოთ ჰილბერტის სივრცე $\mathcal{H}$, შევავსოთ რა Φ სივრცე ნორმის $\|\phi\|=\sqrt{(\phi_n,\phi)}$ მიხედვით.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით დამზერადის სპექტრის საპოვნელად გვჭირდება მივმართოთ აღჭურვილ ჰილბერტის სივრცეს. სახელდობრ, თუ გვსურს ვიპოვოთ სრული სპექტრი შრედინგერის განტოლებისა

$$H\psi=E\psi$$

უწყვეტი E-ს საპოვნელად გვჭირდება ვეძებოთ ამოხსნები ჰილბერტის $L^2(R)$ სივრცის გარეთ, რადგან ამოხსნები $L^2(R)$-ში არსებობს მარტო დისკრეტული E-სთვის. აღჭურვილი ჰილბერტის სივრცის მთავარი იდეაა ვიპოვოთ ამოხსნები, რომლებიც არ არიან $L^2(R)$-ში, არამედ შეუღლებულ მკვრივად განმარტებულ შვარცის სივრცეში $S(R)$. ამიტომ ვაგებთ გელფანდის ტრიპლეტს

$$S(R) \subset L^2(R) \subset S'(R)$$

აღჭურვილი ჰილბერტის სივრცე არ არის ფიზიკის ან კვანტური მექანიკის გაფართოება, არამედ ყველაზე ბუნებრივი მათემატიკური სტრუქტურა, რომელიც მოითხოვება კვანტური მექანიკის შესწავლისას. აღჭურვილი ჰილბერტის სივრცე აიარაღებს ჰილბერტის სივრცეს განზოგადებული ფუნქციების თეორიით და უზრუნველყოფს სრულ მათემატიკურ ფორმულირებას. ეს ფორმალიზმი შეიქმნა 1960-იან წლებში. დღეისათვის უფრო მეტად თანხმდებიან, რომ აღჭურვილი ჰილბერტის სივრცეა და არა ჰილბერტის სივრცე კვანტური მექანიკის ბუნებრივი ველი. სახელწოდება წარმოადგენს პირდაპირ თარგმანს რუსულიდან – оснащенное гильбертого пространство. *რეალურად მხოლოდ შემოუსაზღვრელ ოპერატორებს უწყვეტი სპექტრით სჭირდებათ ეს სივრცე.*

წრფივი სუპერპოზიციის პრინციპი და ალბათობრივი ინტერპრეტაცია არის ორი მთავარი პრინციპი მიკროსამყაროს შეცნობისა. ეს პრინციპები გვეზნება, რომ მდგომარეობათა სივრცე უნდა იყოს წრფივი სივრცე (სუპერპოზიციის პრინციპის გამო), რომელსაც უნდა დავუმატოთ სკალარული ნამრავლი (რათა გამოვთვალოთ ალბათობის ამპლიტუდები). რაც შეეხება წრფივ სივრცეს, თუ ის შევაიარაღეთ სკალარული ნამრავლით, ავტომატურად მივდივართ ჰილბერტის სივრცემდე.

კვანტურ მექანიკაში დამზერადი სიდიდეები წარმოიდგინებიან წრფივი, თვითშეუღლებული ოპერატორებით, რომლებიც ჰილბერტის სივრცეში მოქმედებენ. ამ ოპერატორების საკუთარი მნიშვნელობები წარმოადგენენ სათანადო დამზერადების გაზომვის შედეგად მიღებულ შესაძლო სიდიდეებს. ეს საკუთარი მნიშვნელობები, რომლებიც მათემატიკურად შეესაბამებიან ოპერატორთა სპექტრს, შეიძლება იყვნენ დისკრეტული, უწყვეტი ან მათი კომბინაციები.

როცა A დამზერადის სპექტრი დისკრეტულია და A არის შემოსაზღვრული, მაშინ A განმარტებულია მთელ ჰილბერტის სივრცეზე $\mathcal{H}$ და საკუთარი ვექტორებიც მას მიეკუთვნები-

ან. ამ დროს A არსებითად არის მატრიცა, ანუ დისკრეტული სპექტრის შემთხვევაში $\mathscr{H}$-ს არ სჭირდება გაფართოება. მაგრამ ოპერატორების შემოუსაზღვრელობის გამო სპექტრი უწყვეტ ნაწილსაც შეიცავს. მათი გათვალისწინების საჭიროებით სახელმძღვანელოებში, როგორც წესი, გამოიყენება დირაკის ბრა – კეტ ფორმალიზმი, რომელი აზოგადებს ერმიტული მატრიცების წრფივ ალგებრას. ჰილბერტის სივრცის მათემატიკური მეთოდები არასაკმარისი აღმოჩნდა დირაკის ფორმალიზმისთვის მკაცრი შინაარსის მისაცემად. სწორედ ამ მიზეზით გახდა აუცილებელი გაგვევრცო ჰილბერტის სივრცე აღჭურვილამდე.

შევნიშნოთ, რომ ხანდახან მოსახერხებელია შემოუსაზღვრელი ოპერატორებიდან გადავიდეთ შემოსაზღვრულზე, მაგ., ექსპონენციაციის გამოყენებით. თუ Q და P აღნიშნავენ არსებითად თვითშეუღლებულ ოპერატორებს ერთიდაიმავე დომენით $S(\mathscr{R})$, მაშინ $U_a \equiv \exp(i\hbar aQ)$ და $V_b \equiv \exp(i\hbar bP)$ განსაზღვრავენ უნიტარულ ოპერატორთა ერთპარამეტრიან ოჯახს. კერძოდ, V_b წარმოადგენს ტრანსლაციებს

$$(V_b\psi)(x) = \psi(x-b), \qquad \psi \in L^2(\mathscr{R}, dx) \quad (118)$$

ეს შემოსაზღვრული ოპერატორი უშვებს უწყვეტ სპექტრს, რომელიც შეიცავს ერთეულოვან წრეწირს. ამ ოპერატორების მეშვეობით კანონიკური კომუტატორი $[Q,P] = i\hbar\mathbf{1}$ იღებს ვეილის ფორმას

$$U_a V_b = e^{-\frac{i}{\hbar}ab} V_b U_a \quad (119)$$

ეს თანაფარდობა შეგვიძლია განვიხილოთ დომენებზე დაყოვნების გარეშე, რადგან მხოლოდ შემოსაზღვრულ ოპერატორებს შეიცავს. შედეგი გვეუბნება, რომ შრედინგერის წარმოდგენაში Q არის x-ზე გამრავლების ოპერატორი, ხოლო $P = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ არსებითად არის ერთადერთი რეალიზაცია კანონიკური კომუტაციის თანაფარდობისა.

კვანტური მექანიკა და ჰილბერტის სივრცეები

არსებობს სულ მცირე 3 ჰილბერტის სივრცე, რომლებიც გამოიყენება ნაწილაკის მდგომარეობის აღსაწერად კვანტურ მექანიკაში.

ტალღური მექანიკა.

შრედინგერმა პირველ ნაშრომებში 1926 წელს განიხილა ჰილბერტის სივრცე $L^2(\mathscr{R}, dx)$ კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციებისა (ტალღური ფუნქციებისა) სკალარული ნამრავლით (13) (ან, ეკვივალენტურად, $L^2(\mathscr{R}, dp)$ სივრცე იმპულსურ წარმოდგენაში p-ზე დამოკიდებული). უადგილო არ იქნება, თუ გავიხსენებთ, რომ ნებისმიერი ელემენტი $\psi \in L^2(\mathscr{R}, dx)$ შეიძლება გაიშალოს მოცემულ ორთონორმალურ ბაზისში $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ სივრციდან $L^2(\mathscr{R}, dx)$:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad c_n = \langle \varphi_n, \psi \rangle_{L^2} \in \mathcal{C} \quad (120)$$

თუ $\psi' = \sum c'_n \varphi_n$ აღნიშნავს სხვა ელემენტს $L^2(\mathscr{R}, dx)$-დან, მისი სკალარული ნამრავლი ψ-ზე იღებს ფორმას

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{L^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c}_n c'_n \quad (121)$$

კერძოდ, ნორმისთვის გვაქვს

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n} |c_n|^2 \quad (122)$$

მატრიცული მექანიკა

მას შემდეგ, რაც არჩეულია ორთონორმირებული ბაზისი $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ $L^2(\mathscr{R}, dx)$-სივრციდან, ψ-ს გაშლა ამ ბაზისში გამო-

ხატავს ცალსახა შესაბამისობას ψ ტალღურ ფუნქციასა და უსასრულო $\vec{c}=(c_0,c_1,\ldots)$ კომპლექსური რიცხვების მიმდევრობას შორის. (122) თანაფარდობის გამო ψ ფუნქცია სასრულო ნორმით $\|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathscr{R}} |\psi(x)|^2\, dx < \infty$ ეკვივალენტურია $\vec{c}=(c_0,c_1,\ldots)$ -მიმდევრობის შეჯამებადობისა $\sum_n |c_n|^2 < \infty$.

ამიტომ, კვანტური მექანიკის ფორმულირება შეიძლება კვადრატულად შეჯამებადი მიმდევრობების ჰილბერტის l_2 სივრცეში,

$$l_2=\left\{\vec{c}=(c_0,c_1,\ldots)\middle| c_n\in\mathscr{C}, \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2<\infty\right\}$$

და სკალარული ნამრავლით

$$\langle\vec{c},\vec{c}\,'\rangle_{l_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n c_n'; \qquad \vec{c},\vec{c}\,'\in l_2$$

წრფივი ოპერატორები l_2-ში მოიცემიან უსასრულო რიგის კვადრატული მატრიცებით. კვანტური მექანიკის ეს ფორმულირება ცნობილია, როგორც მატრიცული მექანიკა, რომელიც პირველ რიგში შეიქმნა ბორნის, ჰაიზენბერგის და იორდანის მიერ 1925 წელს. ზოგიერთი შედეგი მიიღო დირაკმა, რომელმაც შემოიტანა ოპერატორების კომუტატორების ცნება, როგორც კლასიკური პუასონის ფრჩხილების კვანტური ანალოგი. შემდგომ პაულიმ მიიღო წყალბადის ატომის სპექტრი მატრიცული მეთოდით.

ამ წარმატების მიუხედავად, მატრიცული მეთოდი ბუნდოვნად ითვლებოდა და სიტუაცია შეიცვალა მას შემდეგ, რაც შრედინგერმა დაამტკიცა მისი ეკვივალენტურობა ტალღურ მექანიკასთან. შესაბამისობა ასეთია

$$\text{ტალღური ფუნქცია } \Big\}\ 1\text{ - }1\ \Big\{ \text{ მიმდევრობა}$$

$$\psi\in L^2(\mathscr{R}, dx)\quad \Big\}\ \Leftrightarrow\ \Big\{\quad \vec{c}\in l_2$$

ამ შედეგმა ბორნი მიიყვანა ტალღური ფუნქციის ალბათობრივ ინტერპრეტაციამდე, რაც საბოლოოდ გახდა თეორიის ფიზიკური პრინციპი. დირაკის და იორდანის ნაშრომების

შემდეგ განმტკიცდა წრფივი ოპერატორების შესწავლა აბსტრაქტულ ჰილბერტის სივრცეში. კურანტმა და ჰილბერტმა განავითარეს ჰილბერტის სივრცის მათემატიკა 1924-27 წლებში სპეციალურად ფიზიკისათვის. რაც შეეხება ჰილბერტის სივრცის აქსიომატიკას, ის დაიწყო ფონ ნეიმანმა მხოლოდ 1927 წელს. შემდგომში ჰილბერტის სივრცის ოპერატორების თეორია დაამუშავეს ძირითადად ფონ ნეიმანმა, შვარცმა და გელფანდმა. ამ კვლევათა გამოისობით შესაძლებელი გახდა მდგომარეობათა და დამზერადი სიდიდეების ზუსტი აღწერა. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ თავისი ფუნდამენტური შრომები აღნიშნულმა ავტორებმა შეასრულეს 23 წლის მახლობელ ასაკში.

დირაკმა, იორდანმა და ფონ ნეიმანმა, (1926-1931) გამოიყენეს ე.წ. *სეპარაბელური უსასრულო განზომილების* ჰილბერტის სივრცე (საშუალებას გვაძლევს ავიღოთ ორთოგონალური ბაზისი, რომელიც შეიცავს ვექტორთა უთვალავ ოჯახს). დირაკმა შემოიღო ბრა და კეტ აღნიშვნები ვექტორებისთვის ჰილბერტის სივრცეში.

ამ აღნიშვნებით ორთონორმალური ბაზისი $\{|\Phi_n\rangle \equiv |n\rangle\}_{n\in N} \in \mathscr{H}$ არის ვექტორთა სისტემა, რომლებიც აკმაყოფილებენ ორთონორმირების თანაფარდობას

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \qquad n,m \in N$$

და ჩაკეტილობის (სისრულის) პირობას

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}_{\mathscr{H}}$$

ნებისმიერ ვექტორთან გამოყენება გვაძლევს

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\Psi\rangle$$

რაც დაუკავშირდა ტალღურ ფუნქციას, $\psi(n) = \langle n|\Psi\rangle$. სკალარული ნამრავლია

$$\langle |\Phi\rangle, A|\Psi\rangle\rangle_H \equiv \langle \Phi|A|\Psi\rangle$$

ამიტომ ბოლო გამოსახულება უნდა განვიხილოთ როგორც

ორი წრფივი ასახვა,

$$D(A)\xrightarrow{A}\mathcal{H}\xrightarrow{\langle\Phi|}\mathcal{C}$$
$$|\Psi\rangle \to A|\Psi\rangle \to \langle\Phi|A|\Psi\rangle$$

კავშირები ჰილბერტის სივრცეებს შორის

სხვადასხვა ჰილბერტის სივრცეებს შორის კავშირის დასამყარებლად გვჭირდება უნიტარული ოპერატორები და იზომორფიზმი.

განმარტება: $\mathcal{H}_i\,(i=1,2)$ იყოს ორი კომპლექსური სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცე სკალარული ნამრავლით $\langle,\rangle_{\mathcal{H}_i}$. წრფივ ოპერატორს $U:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ ეწოდება უნიტარული, თუ

1. U ყველგანაა განსაზღვრული $\mathcal{H}_1$-ში
2. $\mathcal{H}_1$-ის ასახვა U-ს მეშვეობით არის ყველაფერი $\mathcal{H}_2$-ში და
3. U ინახავს სკალარულ ნამრავლს:

$$\langle Uf,Ug\rangle_{\mathcal{H}_2}=\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}_1},\ \text{ყველა}\ f,g\in\mathcal{H}_1$$

ორ ჰილბერტის სივრცეს, დაკავშირებულს უნიტარული ოპერატორით, ეწოდება იზომორფული და ასე იწერება $\mathcal{H}_1\simeq\mathcal{H}_2$

ამრიგად, ორი იზომორფული ჰილბერტის სივრცე წარმოადგენს ერთიდაიმავე აბსტრაქტული სტრუქტურის სხვადასხვა რეალიზაციას და შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მთლიანად ეკვივალენტური.

თეორემა

- კომპლექსური სივრცეები, l_2, $L^2(\mathcal{R},dx)$ და $L^2(\mathcal{R},dp)$ არიან სეპარაბელური და უსასრულო-განზომილების.
- ყოველი კომპლექსური ჰილბერტის სივრცე, რომელიც სეპარაბელურია და უსასრულო განზომილების, იზომორფულია l_2-ისა.

$$\mathcal{H}\simeq l_2\simeq L^2(\mathcal{R},dx)\simeq L^2(\mathcal{R},dp)$$

ინვარიანტული ფორმალიზმი

რადგან სხვადასხვა ჰილბერტის სივრცეები, გამოყენებული კვანტურ მექანიკაში, ყველა ერთმანეთის იზომორფულია, ისინი წარმოადგენენ მთლიან ეკვივალენტურ მათემატიკურ სტრუქტურას. მაგრამ, პრაქტიკული თვალსაზრისით ზოგიერთი სივრცე უფრო მოხერხებულია სხვაზე.

ფიზიკური მოვლენების არენა არის კონფიგურაციული სივრცე, პარამეტრიზებული x-ით და სასაზღვრო და რეგულარულობის პირობები სწორედ ეხება ამ სივრცეში განსაზღვრულ ტალღურ ფუნქციებს: პრივილეგია ენიჭება ჰილბერტის $L^2\left(\mathscr{R},dx\right)$ სივრცეს.

მისი უპირატესობა ჩვეულებრივ მოტივირებულია ხოლმე ევკლიდური (კავშირი ჰილბერტთან) $\mathscr{R}^n\left(\mathscr{C}^n\right)$ სივრცით. ამ შინაარსით აბსტრაქტული ჰილბერტის სივრცე კვანტურ მექანიკაში უფრო ზოგადია, ვიდრე მატრიცულ მექანიკაში. მაგრამ, არსებობს კრიტიკული განსხვავება სასრულო და უსასრულო განზომილებიან ვექტორებულ სივრცეებს შორის.

მაგალითად, წრფივი ოპერატორის განმარტება უსასრულო განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეში აუცილებლად მოითხოვს ოპერატორის მოქმედების და დომენის სპეციფიკას მისთვის, რადგან ოპერატორის სპექტრი *ძალიან არის მგრძობიარე დომენის მიმართ (სასაზღვრო პირობები, და ა.შ.)*. მაგალითად, დომენის არჩევის მიხედვით, იმპულსის $P=-i\hbar\dfrac{d}{dx}$ ოპერატორის სპექტრი კომპაქტურ ინტერვალზე $\left[a,b\right]\subset\mathscr{R}$ შეიძლება იყოს ცარიელი ყველა $\mathscr{C}$-სთვის ან ქვესივრცე $\mathscr{R}$-ში.

დავუბრუნდეთ ახლა დამზერადების დახასიათებას:

დამზერადი განისაზღვრება როგორც ერმიტული ოპერატორი, რომლის ორთონორმირებული საკუთარი ვექტორები განსაზღვრავენ ბაზისს ჰილბერტის სივრცეში. აქედან გამომდინარე, ფორმალურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მდებარეო-

ბის და იმპულსის ოპერატორები $\mathscr{R}$ -ში არიან დამზერადები. ზოგიერთი სირთულე წარმოიქმნება R^2 ან R^3 არა-დეკარტულ კოორდინატებში, მაგალითად, იმპულსის რადიალური კომპონენტი P_r არის ერმიტული, მაგრამ არ წარმოადგენს დამზერადს. უფრო მეტიც, არსებობს უფრო რთული ოპერატორები (ჰამილტონიანი, რომელიც შეიცავს რთულ პოტენციალებს და ა. შ .ან ტოპოლოგიური ტიპის პოტენციალებს, როგორიცაა, აარონოვ-ბომის ან ანიონების და სხვ.). ეს გვაიძულებს შემოვიტანოთ ხელოვნური პირობები ტალღური ფუნქციებისთვის (რეგულარულობა, სასრულობა, ცალსახობა და ა. შ.); ამის გარდა, ეს იწვევს აუცილებლობას იმისა, რომ ცხადად განვსაზღვროთ საკუთარი ვექტორების ორთონორმალური სისტემა და შევამოწმოთ ამ სისტემის სისრულე.

მიდგომაში, რომელიც ითვალისწინებს განსაზღვრის დომენებს, დამზერადები უბრალოდ მოიცემიან თვითშეუღლებული ოპერატორებით. ეს მოთხოვნა უზრუნველყოფს, რომ ოპერატორს აქვს ნამდვილი სპექტრი და რომ მისი (განზოგადებული) საკუთარი ვექტორები განსაზღვრავენ ჰილბერტის სივრცის განზოგადებულ ბაზისს (ჰილბერტის სპექტრალური თეორემა) არსებობს მარტივი კრიტერიუმი ერმიტული ოპერატორის თვითშეუღლებულობის დასადგენად.

პირველ რიგში გავერკვეთ პარადოქსების ხასიათში და ვნახოთ, როგორ ამოვხსნათ ისინი ზემოთ განხილული მათემატიკური აპარატის ჩარჩოებში.

პარადოქსების ანალიზი:

• *პარადოქსი 1*. პირველი პარადოქსის თაობაზე გზადაგზა უკვე ბევრი რამ ითქვა. ვთქვათ, კომუტაციური თანაფარდობა $\left[Q,P\right]=i\hbar\,\mathbf{1}$ კმაყოფილდება ამ ოპერატორებით ჰილბერტის სივრცეში $\mathcal{H}$ სასრულ-განზომილებაში n. (ე.ი. $\mathcal{H}\simeq\mathcal{C}^n$). ამ შემთხვევაში დასაშვებია ამ ოპერატორების რეალიზაცია $n\times n$ მატრიცებით, შპური კარგად არის განმარტებული და მიიღება

$$0=Tr\left[Q,P\right]=Tr\left(-i\hbar 1_n\right)=-i\hbar n$$

შედეგი უაზროა. ვასკვნით, რომ ჰეიზენბერგის თანაფარდობის რეალიზაცია არ შეიძლება სასრულო-განზომილების ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ კვანტური მექანიკის ფორმულირება უნდა მოხდეს უსასრულო-განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეში, სადაც შპური აღარ არის კარგად განსაზღვრული ოპერაცია ყველა ოპერატორისათვის.

შეუსაბამობა კიდევ შეიძლება დაიძლიოს სხვა გზითაც უსასრულო განზომილებიან ჰილბერტის სივრცეში იმ დაშვებით, რომ ერთ-ერთი ამ ოპერატორთაგან უნდა იყოს *შემოუსაზღვრელი,* ამიტომ ეს ფუნდამენტური თანაფარდობა არ შეიძლება განვიხილოთ, თუ არ ვიზრუნებთ ოპერატორების დომენებზე $L^2\left(\mathcal{R},dx\right)$ სივრცეში. როგორც ადრე ვნახეთ,

ამ პარადოქსის ფარგლებში შეგვიძლია განვიხილოთ კიდევ ერთი უაზრო შედეგი, რომელიც გამომდინარეობს ფუნდამენტური კომუტაციის თანაფარდობიდან, $\left[x,p_x\right]=i\hbar$, რომელზე დაყრდნობითაც კოშის უტოლობის გამოყენებით მიიღება ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის პრინციპი

$$\Delta x\cdot\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$$

ψ_p იყოს იმპულსის $\hat{p}$ ოპერატორის ნორმირებული საკუთარი ფუნქცია, $\hat{p}\psi_p=p\psi_p$. ერმიტულობის გამო მივიღებთ

$$\left(\psi_p,[\hat{x},\hat{p}]\psi_p\right)=\left(\psi_p,\hat{x}\hat{p}\psi_p\right)-\left(\psi_p,\hat{p}\hat{x}\psi_p\right)=$$
$$=p\left(\psi_p,\hat{x}\psi_p\right)-\left(\hat{p}\psi_p,\hat{x}\psi_p\right)=$$
$$=p\left[\left(\psi_p,\hat{x}\psi_p\right)-\left(\psi_p,\hat{x}\psi_p\right)\right]=0$$

მეორეს მხრივ, *თუ ჩვენ ჯერ კომუტატორს გამოვთვლიდ-ით*, მიიღებოდა

$$\left(\psi_p,[\hat{x},\hat{p}]\psi_p\right)=i\hbar\left(\psi_p,\psi_p\right)=i\hbar\neq 0$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ამ ცხადი პარადოქსის ამოხსნა სხვადასხვაა სხვადასხვა ტიპის ინტერვალებში. კერძოდ, (ინტერვალი სასრულია თუ უსასრულო), ამის მიხედვით იმპულსის ოპერატორი თვით-შეუღლებულია ან არა, ან თუ არსებობს, არ აქვს საკუთარი ვექტორები და არ მიეკუთვნებიან $\hat{p}\hat{x}$ -ის დომენს. ცოდნა ოპ-ერატორის დომენის შესახებ კრიტიკულია და არ უნდა ავუა-როთ გვერდი პრაქტიკულ გამოთვლებში. გარდა ამისა, ნახ-ევრად სასრულო ან სასრულო ინტერვალებში კანონიკური კომუტაციის თანაფარდობა და განუზღვრელობათა თანაფარ-დობა ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. რეალურად, პრობლემა იმაშია, რომ საქმე გვაქვს შემოუსაზღვრელ ოპერატორებთან, რომელთათვის კომუტატორის გამოთვლა არ არის კორექტუ-ლად განმარტებული.

- *პარადოქსი 2.* $P=-i\hbar\dfrac{d}{dx}$ ოპერატორის მაქსიმალური დომენი არის

$$D_{\max}\left(P\right)=\left\{\psi\in L^2\left(R.dx\right)\middle|\psi'\in L^2\left(R.dx\right)\right\}$$

ამ არეს მიკუთვნებულ ფუნქციებს აქვთ გარკვეული რეგ-ულარულობის თვისება და მათი წარმოებული კვადრატულად ინტეგრებადია $\mathcal{R}$ -ში. კერძოდ, ეს ფუნქციები უწყვეტია და ნულისკენ მიისწრაფიან, როცა $x\to\pm\infty$. ეს ნიშნავს, რომ $D_{\max}\left(P\right)$ -ზე მოქმედი P ოპერატორი არის ერმიტული.

სხვა არჩევანია შვარცის სივრცე $\mathcal{S}\left(R\right)\subset\mathcal{D}_{\max}\left(P\right)$, რომე-

ლიც ჩადგმულია მაქსიმალურ დომენში, და აქვს უფრო სწრაფი დაცემა უსასრულობაში.

- *პარადოქსი 3.* **შვარცის სივრცე** $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subset L^2(R,dx)$ არის ინვარიანტული დომენი P,Q ოპერატორებისთვის, ამიტომ ასევე უნდა გვქონდეს $A = PQ^3 + Q^3P$ ოპერატორისთვის:

$$A : \mathcal{S}(\mathcal{R}) \to \mathcal{S}(\mathcal{R})$$

ნაწილობითი ინტეგრაცია ასე განმარტებული ოპერატორისთვის გვარწმუნებს, რომ A ოპერატორი არის ერმიტული

$$\langle g, Af \rangle = \langle Ag, f \rangle, \qquad f,g \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{S}(R)$$

ფუნქცია f მიეკუთვნება ჰილბერტის $L^2(\mathcal{R},dx)$ სივრცეს, მაგრამ არ მიეკუთვნება A-ს დომენს, რადგან ის უსასრულობაში არ ეცემა უფრო სწრაფად, ვიდრე ნებისმიერი შებრუნებული პოლინომიალი, მაგალითად,

$x^3 f(x) \propto x^{3/2} \exp(-1/4x^2)$ არ არის შემოსაზღვრული, როცა $x \to \pm\infty$. შედეგად, $-i\hbar$ არ არის A ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა. მაგრამ,

$-i\hbar$ არის A^+ ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა, რომელიც მოქმედებს ისევე, როგორც A. ამრიგად, ვადგენთ, რომ P არის ერმიტული, და მისი შეუღლებული მოქმედებს სხვა დომენში, ამიტომ ის არ არის თვითშეუღლებული.

- *პარადოქსი 4.*

განვიხილოთ მე-4 პარადოქსის მეორე ნაწილი, ანუ P ოპერატორის სპექტრი. რადგან ის არ არის თვითშეუღლებული,საზოგადოდ შეიცავს *ნარჩენ სპექტრს.* რაც განმარტების თანახმად, არის ყველა კომპლექსური რიცხვი $z \in \mathcal{C}$, რომელიც არ არის P-ს საკუთარი მნიშვნელობა, მაგრამ მისთვის $\overline{z}$ არის P^+-ის საკუთარი მნიშვნელობა. ამ მაგალითში, აღნიშნული ოპერატორების დომენებია

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(P) = \left\{ \psi \in H \middle| \psi' \in H, \quad \psi(0) = 0 = \psi(1) \right\} \\ &\mathcal{D}(P^+) = \left\{ \varphi \in H \middle| \varphi' \in H \right\} \end{aligned} \qquad (123)$$

შესაბამისად. ამიტომ $\mathscr{D}\left(P^{+}\right)$-ს მიკუთვნებული ფუნქციები არ აკმაყოფილებენ რაიმე სასაზღვრო პირობას, მაშინ, როცა $\mathscr{D}\left(P\right)$-ს მიკუთვნებულები ნულდებიან საზღვრებზე $x=0,1$. რადგან ფუნქციები $\varphi_p\left(x\right)=\exp\left(\frac{1}{2}px\right), \quad p\in\mathscr{C}$, არიან P^{+}-ის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლების ამოხსნები

$$(P^{+}\varphi_p)\left(x\right)=p\varphi_p\left(x\right), \qquad \left(\varphi_p\in\mathscr{D}\left(P^{+}\right),\varphi_p\neq 0\right) \quad (124)$$

ყველა კომპლექსური რიცხვი არის P^{+}-ის საკუთარი მნიშვნელობა, მაგრამ არც ერთი მათგანი არის P-ს საკუთარი მნიშვნელობა, რადგან φ_p არ ნულდება საზღვარზე და ამიტომ არ ხვდება $\mathscr{D}\left(P\right)$-ში. აქედან გამომდინარე, P-ს ნარჩენი სპექტრი არის $\mathscr{C}$. მართლაც, ეს წარმოადგენს P-ს სრულ სპექტრს, რადგან მისი დისკრეტული და უწყვეტი სპექტრები არიან ცარიელი.

ეს მაგალითი ფიზიკოსს ტოვებს გაუგებრობაში: რადგან P არ არის თვითშეუღლებული, მისი სპექტრი პირდაპირ ინტერპრეტაციას არ ემორჩილება. მაგრამ, ის მაინც შეიცავს ინფორმაციას, რომელიც საჭიროა ფიზიკაში.

- განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: სასრულო $\left[0,a\right]$ ინტერვალში მოძრავი ნაწილაკი, რომლის აღმწერი ტალღური ფუნქცია აკმაყოფილებდეს ნულოვან სასაზღვრო პირობას კიდეებზე. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ნაწილაკი მოძრაობს სასრულო სიგანის უსასრულო სწორკუთხა ორმოში. მისი ტალღური ფუნქციებია

$$\psi_n\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad E_n=\frac{\hbar^2 n^2}{2ma^2}n^2; \qquad n\in N$$

ეს სისტემა არის ორთოგონალური ბაზისი $L^2\left[0,a\right]$-ში, რაც უზრუნველჰყოფს ჰამილტონიანის თვითშეუღლებულობას. რადგან ჰამილტონიანის სპექტრი გადაუგვარებელია, მისი სა-

კუთარი ფუნქციები საერთო უნდა იყოს მასთან კომუტირებად იმპულსის ოპერატორთან. გამოთვლა გვაძლევს

$$\hat{P}\psi_n = -i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{n\pi}{a}\cos(\frac{n\pi}{a}x) \neq p_n\psi_n \quad (125)$$

რაც ეწინააღმდეგება თეორიას. პარადოქსი გამოვლინება არასწორი დაშვებისა, რომ $\hat{P}$ და H კომუტირებენ, $H = \hat{P}^2 / 2m$. ორივე ამ ოპერატორს აქვს თავთავისი დომენი, და ამიტომ კომუტატორი არ არის კარგად განსაზღვრული.

- *პარადოქსი* 5. φ კუთხეზე გამრავლების ოპერატორი ჰილბერტის სივრცეში $\mathscr{H} = L^2\left(\left[0,2\pi\right],d\varphi\right)$ ყველგან განსაზღვრულია და თვითშეუღლებული

$$\left\langle g,\varphi f\right\rangle = \left\langle \varphi g, f\right\rangle, \text{ ყველა } g,f \in \mathscr{H}$$

ის, რაც ეხებოდა $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$ ოპერატორს გამოგვადგება $L_Z = -i\hbar\frac{d}{d\varphi}$ -ისთვის

$L^2\left(\left[0,2\pi\right]\right)$-ში. ნაწილობითი ინტეგრაცია იძლევა

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\left\{\overline{g}L_Z f + i\hbar\frac{dg}{d\varphi}f\right\}(\varphi) = -i\hbar\left[\overline{g(2\pi)}f(2\pi) - \overline{g(0)}f(0)\right]$$

$$f \in D(L_Z)$$

პოლარული კუთხით პერიოდულობის გამო L_Z ის ფუნქციები არიან პერიოდული.

$$L_Z = -i\hbar\frac{d}{d\varphi}, \qquad D(L_Z) = \left\{f \in \mathscr{H} \middle| f' \in \mathscr{H},\ f(0) = f(2\pi)\right\}$$

სათანადოდ, ზედაპირული წევრი ნულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $g(0) = g(2\pi)$; ეს კი ნიშნავს, რომ L_Z^+ ოპერატორი მოქმედებს ისევე, როგორც L_Z და უშვებს იმავე დომენს. ამიტომ, ზედა დომენით განმარტებული ოპერატორი

არის თვითშეუღლებული.

რომ მოვძებნოთ $\left[L_Z,\varphi\right]$ კომუტატორის დომენი შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ორი ოპერატორისთვის გვაქვს

$$\mathscr{D}\left(A+B\right)=\mathscr{D}\left(A\right)+\mathscr{D}\left(B\right)$$

$$\mathscr{D}\left(AB\right)=\left\{f\in\mathscr{D}\left(B\right)\middle|Bf\in\mathscr{D}\left(A\right)\right\}$$

ამიტომ

$$\mathscr{D}\left(\left[\varphi L_Z\right]\right)=\mathscr{D}\left(L_Z\varphi\right)\bigcap\mathscr{D}\left(\varphi L_Z\right)$$

სადაც

$$\mathscr{D}\left(\varphi L_Z\right)=\left\{f\in\mathscr{D}\left(L_Z\right)\middle|L_Z f\in\mathscr{D}\left(\varphi\right)=\mathscr{H}\right\}=\mathscr{D}\left(L_Z\right)$$

$$\mathscr{D}\left(L_Z\varphi\right)=\left\{f\in\mathscr{D}\left(\varphi\right)=\mathscr{H}\middle|\varphi f\in\mathscr{D}\left(L_Z\right)\right\}$$

მაგრამ, ფუნქცია $\tilde{f}=\varphi f$, რომელიც გამოჩნდა ბოლო გამოსახულებაში და იღებს მნიშვნელობებს

$$\tilde{f}\left(0\right)=(\varphi f)\left(0\right)=0$$

$$\tilde{f}\left(2\pi\right)=(\varphi f)\left(2\pi\right)=2\pi f\left(2\pi\right)$$

და $\tilde{f}\in\mathscr{D}\left(L_Z\right)$ ნიშნავს, რომ $\tilde{f}\left(0\right)=\tilde{f}\left(2\pi\right)$, ე.ი. $f\left(2\pi\right)=0$

საბოლოოდ,

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}\left(\varphi L_Z\right)=\mathscr{D}\left(L_Z\right)\\
&\mathscr{D}\left(L_Z\varphi\right)=\left\{f\in\mathscr{H}\middle\|f'\in\mathscr{H},\quad f\left(2\pi\right)=0\right\}\\
&\mathscr{D}\left(\left[L_Z,\varphi\right]\right)=\left\{f\in\mathscr{H}\middle|f'\in\mathscr{H},\quad f\left(0\right)=0=f\left(2\pi\right)\right\}
\end{aligned}\tag{127}$$

L_Z-ის საკუთარი ფუნქციები $\psi_m\left(\varphi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(im\varphi\right)$ არ მიეკუთვნებიან კომუტატორის დომენს, რადგან არ ნულდებიან საზღვრებზე 0 და 2π. დასაწყისში მოცემული გამოყვანა უაზროა.

განუზღვრელობის თანაფარდობის მოდიფიკაცია

განვიხილოთ ორი დამზერადი A და B (ე.ი. თვითშეუღლე-ბული ოპერატორები ჰილბერტის სივრცეში) და მდგომარეობა $\psi \in \mathscr{H}$. განუზღვრელობათა თანაფარდობა იწერება ცნობილი ფორმით

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \ge \frac{1}{2}\left|\left\langle \psi, i\left[A,B\right]\psi\right\rangle\right| \quad (128)$$

სადაც $\left(\Delta_\psi A\right)^2 = \left\|\left(A - \langle A\rangle_\psi \mathbf{1}\right)\right\|^2; \qquad \langle A\rangle_\psi = \langle \psi, A\psi\rangle$, ასევე B

-სთვის. ასე, რომ მარცხენა მხარე განისაზღვრება მხოლოდ არე-ში $\psi \in \mathscr{D}(A) \bigcap \mathscr{D}(B)$, რაც ზუსტად არის $\mathscr{H}$ -ის ქვესივრცე, რომელიც შეიცავს ყველა ψ მდგომარეობას. მარჯვენა მხარე განმარტებულია ქვესივრცეში $\mathscr{D}\left(\left[A,B\right]\right) = \mathscr{D}(AB) \bigcap \mathscr{D}(BA)$, რომელიც არის საზოგადოდ ძალიან მცირე. მაგრამ, რაკი A და B არიან თვითშეუღლებულნი, განუზღვრელობათა თანა-ფარდობა ასეც გადაიწერება

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \ge \frac{1}{2}\left| i\langle A\psi, B\psi\rangle - i\langle B\psi, A\psi\rangle\right| \quad (129)$$

ახლა დომენები მარცხნივ და მარჯვნივ ერთმანეთს ემთხ-ვევა, ე.ი. $\mathscr{D}(A) \bigcap \mathscr{D}(B)$. ამრიგად, განუზღვრელობათა ნამ-რავლი ორი დამზერადისა A და B, არ განისაზღვრება მათი კომუტატორით, არამედ გადაიწერება ერმიტული ფორმით

(წრფივნახევრიანი ფორმით)

$$\Phi_{A,B} = i\langle Af, Bg\rangle - i\langle Bf, Ag\rangle, \qquad f, g \in \mathscr{D}(A) \bigcap \mathscr{D}(B) \quad (130)$$

ამ თანაფარდობის მიღება მარტივია, და იძლევა შემდეგს: თუ $A = P = -i\hbar\dfrac{d}{dx}. \qquad B = Q = x \qquad \mathscr{H} = L^2(R, dx)$

მარჯვენა მხარეში ნაწილობითი ინტეგრაცია ტარდება და გვაქვს $\Delta_\psi P \Delta_\psi Q \ge \hbar/2$, ხოლო $\psi \in \mathscr{D}(P) \bigcap \mathscr{D}(Q)$. ე.ი. ჰაი-ზენბერგის ფუნდამენტური თანაფარდობა ძალაშია.

მეორეს მხრივ, თუ

$A = L_Z = -i\hbar\dfrac{d}{d\varphi}, \qquad B = \varphi \in \mathscr{H} = L^2\left(\left[0, 2\pi\right], d\varphi\right)$, ზედაპირ-

ული წევრი ნაწილობითი ინტეგრაციისას არ ქრება და მივყავართ განუზღვრელობის თანაფარდობაზე:

$$\Delta_{\psi} L_Z \Delta_{\psi} \varphi \geq \frac{\hbar}{2}\left|1-2\pi\left|\psi\left(2\pi\right)\right|^2\right|, \quad \psi \in D\left(L_Z\right) \bigcap D\left(\varphi\right) = D\left(L_Z\right) \quad (131)$$

ამრიგად, ამ განუზღვრელობათა ნამრავლი ხდება $\hbar/2$-ზე ნაკლები. აღსანიშნავია, რომ

$\mathscr{D}\left(\left[L_Z,\varphi\right]\right)$ დომენს მიკუთვნებული ψ ფუნქციებისათვის, ე. ი. თუ $\psi\left(2\pi\right)=0$ (128) შეიძლება გამოვიყენოთ და მიიღება (131) იგივე შედეგი.

- რაც შეეხება ბოლო პარადოქსს, მისი ამოხსნაც შესაძლებელია: თუ განვიხილავთ მთელ ნამდვილ ღერძზე განსაზღვრულ ტალღურ ფუნქციას და არ შემოვიფარგლებით $\left[-a,+a\right]$ ინტერვალით. წყვეტადობა ψ'' ფუნქციისა კიდურა წერტილებში ნიშნავს, რომ $\psi'''\left(x\right)$ მოიცემა დირაკის ფუნქციის წარმოებულით

$$\psi'''\left(x\right) = -\frac{\sqrt{15}}{2a^{5/2}}\left[\delta'\left(x+a\right)-\delta'\left(x-a\right)\right], \qquad x \in R \quad (132)$$

ამის ჩასმა $\left\langle\psi, H^2\psi\right\rangle$-ში გვაძლევს იგივე არანულოვან შედეგს, რასაც $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 W_{n.}$. შენიშნული გაუგებრობა მოდის იქიდან, რომ გამოთვლებისას სწორედ არ იყო გათვალისწინებული სასაზღვრო პირობები.

განვიხილოთ **ცხადი გამოთვლები:**

უსასრულო პოტენციალური ორმო არის მათემატიკური იდეალიზაცია სასრულო V_0 სიმაღლის ორმოსი ზღვარში, როცა $V_0 \to \infty$. ორმოს გარეთ ვნახავთ, რომ სტაციონარული მდგომარეობების ტალღური ფუნქცია ნულისკენ მიისწრაფის ამ ზღვარში. ამიტომ შესაფერი სასაზღვრო პირობა იქნება $\psi\left(\pm a\right)=0$ - ნაწილაკი ორმოს შიგნით ჩაჭერილია. არის თუ

არა ჰამილტონიანი H თვითშეუღლებული? ორჯერ ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარებით მივიღებთ

$$\langle\varphi, H\psi\rangle \equiv \frac{-\hbar^2}{2m}\int_{-a}^{+a} dx\overline{\varphi(x)}\psi''(x)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-a}^{+a} dx\overline{\varphi''(x)}\psi(x) + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\bar{\varphi}'\psi - \bar{\varphi}\psi'\right](x)_{-a}^{+a} \quad (133)$$

$$= \langle H^{+}\varphi, \psi\rangle - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\bar{\varphi}(a)\psi'(a) - \bar{\varphi}(-a)\psi'(-a)\right]$$

რადგან არ გვაქვს რაიმე შეზღუდვა $\psi'(\pm a)$-ზე, ზედაპირული წევრი ნულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\varphi(\pm a) = 0$. ამრიგად, H^{+} მოქმედებს ისევე, როგორც H და მის დომენზე მიკუთვნებული φ ფუნქციები აკმაყოფილებენ იმავე პირობებს, რასაც H-ზე მიკუთვნებული. ამიტომ $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ ოპერატორი, განსაზღვრული დომენზე

$$D(H) = \left\{\psi \in H \middle| \psi'' \in H; \psi(\pm a) = 0\right\}$$

ქმნის თვითშეუღლებულ ოპერატორს (ე.ი. არის დამზერადი). მისი სპექტრი დისკრეტულია და გადაუგვარებელი, ხოლო მასთან დაკავშირებული საკუთარი ფუნქციები მოიცემა ასე

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & n = 2,4,6,... \\ = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & n = 1,3,5,.... \end{cases} \quad (134)$$

სათანადოდ იცვლება H-ის გაშლა, რომელიც ახლა ასე გამოიყურება: $\sum_{n=1}^{\infty} E_n W_n$, სადაც W_n აღნიშნავს ნორმირებულ მდგომარეობებზე პროექციის ოპერატორს: $W_n\psi = \langle\varphi_n, \psi\rangle\varphi_n$.

სპექტრალური თეორემის თანახმად, H^2 ოპერატორი განისაზღვრება H-ის სპექტრალური გაშლით,

$$H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 W_n ,$$

რაც ნიშნავს, რომ $H^2\varphi_n = E_n^2\varphi_n$. რომ ვიპოვოთ ცხადად ის დომენი, რომელშიც ეს ოპერატორი არის თვითშეუღლებული, ჩავატაროთ 4 ნაწილობითი ინტეგრაცია თანმიმდევრობით,

$$\left\langle \varphi, H^2\psi \right\rangle \equiv \frac{\hbar^4}{4m^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\overline{\varphi(x)}\psi''''(x) =$$

$$=$$

$$\frac{\hbar^2}{4m^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi''''}(x)\psi(x) + \frac{\hbar^2}{4m^2}\left[\left(\bar{\varphi}\psi''' - \bar{\varphi}'\psi'' + \bar{\varphi}''\psi' - \bar{\varphi}'''\psi\right)(x)\right]_{-a}^{+a}$$

სასაზღვრო პირობები $\psi(\pm a) = 0 = \varphi(\pm a)$ გაანულებს პირველ და ბოლო წევრს. სხვების გასანულებლად არსებობს სხვადასხვა პირობა: მაგ., $\psi'(\pm a) = 0 = \varphi'(\pm a)$ ან $\psi''(\pm a) = 0 = \varphi''(\pm a)$. მაგრამ H^2-ის ალბათობრივი გამოხატვის ფორმულის თანახმად H-ის საკუთარი ფუნქციები უნდა მიეკუთვნებოდეს H^2-ის დომენს: რადგან ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას $\varphi_n(\pm a) = 0$, ამიტომ H^2-ის დომენია

$$\mathscr{D}\left(H^2\right) = \left\{\psi \in H \middle| \psi'''' \in H,\, \psi(\pm a) = 0 = \psi''(\pm a)\right\}$$

ვხედავთ, რომ ეს არის მხოლოდ ერთი გზა ჩავთვალოთ $\frac{\hbar^4}{4m^2}\frac{d^4}{dx^4}$ ოპერატორი $L^2[-a,+a]$-ში თვითშეუღლებულად სხვა შესაძლებლობებთან ერთად (რომლებიც სასაზღვრო პირობებით განისაზღვრება, მაგალითად, $\psi(\pm a) = 0 = \psi'(\pm a)$), მაგრამ, ესეც არის ცალკე შესაძლებლობა სხვებთან ერთად.

დავუბრუნდეთ ახლა პარადოქსს. თუ $\psi \in \mathscr{D}\left(H^2\right) \subset \mathscr{D}(H)$, ზემოხსენებული გაშლა გვაძლევს

$$\left\langle H^2 \right\rangle_\psi \equiv \left\langle \psi, H^2\psi \right\rangle = \left\langle \psi, \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 W_n\psi \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \left\langle \psi, W_n\psi \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 W_n \quad (135)$$

სადაც $W_n = \left|\left\langle \varphi_n, \psi \right\rangle\right|^2$. თუ $\psi \in \mathscr{D}(H)$, შეგვიძლია იგივე შედეგი მივიღოთ პროექციული ოპერატორის თვითშეუღლებელობიდან გამომდინარე.

ჩვენ შემთხვევაში ფუნქცია $\psi(x) = \sqrt{15}/\left(4a^{5/2}\right)\left(a^2 - x^2\right)$ არ აკმაყოფილებს პირობას $\psi''(\pm a) = 0$, ამიტომ ის არ მიეკუთვნება H^2-ის დომენს. ამის გამო გამოსახულება $\left\langle \psi, H^2\psi \right\rangle$ არ არის განსაზღვრული. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუმცა ინტეგრალი სწორად გამოითვლება, ის არ შეიძლება გავაიგივეოთ $\left\langle \psi, H^2\psi \right\rangle$-თან აქ განხილული ფუნქციისათვის. მეორეს მხრივ, გვაქვს $\psi \in \mathscr{D}(H)$, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობა $\left\langle H^2 \right\rangle_\psi$ შეგვიძლია გამოვთვალოთ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 W_n$-ის მიხედვით, ანუ ეკვივალენტურად, ასე

$$\|H\psi\|^2 \equiv \int_{-a}^{=a} dx \left|(H\psi)(x)\right|^2 = \frac{\hbar^4}{4m^2}\int_{-a}^{+a} dx \left|\psi'''(x)\right|^2 = \frac{15\hbar^4}{8m^2a^4}$$

ახლა განვიხილოთ მე-4 პარადოქსის მეორე ნაწილი, ანუ P ოპერატორის სპექტრი. რადგან ის არ არის თვითშეუღლებული, საზოგადოდ შეიცავს *ნარჩენ სპექტრს.* რაც განმარტების თანახმად, არის ყველა კომპლექსური რიცხვი $z \in \mathscr{C}$, რომელიც არ არის P-ს საკუთარი მნიშვნელობა, მაგრამ მისთვის $\overline{z}$ არის P^+-ის საკუთარი მნიშვნელობა. ამ მაგალითში, აღნიშნული ოპერატორების დომენებია

$$\mathscr{D}(P) = \left\{\psi \in \mathscr{H} \middle| \psi' \in \mathscr{H}, \quad \psi(0) = 0 = \psi(1)\right\}$$

$$\mathscr{D}\left(P^+\right) = \left\{\varphi \in \mathscr{H} \middle| \varphi' \in \mathscr{H}\right\}$$

შესაბამისად. ამიტომ $\mathscr{D}\left(P^+\right)$-ს მიკუთვნებული ფუნქციები არ აკმაყოფილებენ რაიმე სასაზღვრო პირობას, მაშინ, როცა $\mathscr{D}(P)$-ს მიკუთვნებულები ნულდებიან საზღვრებზე $x = 0,1$. რადგან ფუნქციები $\varphi_p(x) = \exp\left(\frac{1}{2}px\right), \quad p \in \mathscr{C}$, არიან P^+-ის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლების ამოხსნები

$$(P^{+}\varphi_p)(x) = p\varphi_p(x), \qquad \left(\varphi_p \in \mathscr{D}\left(P^{+}\right), \varphi_p \neq 0\right)$$

ყველა კომპლექსური რიცხვი არის P^{+}-ის საკუთარი მნიშვნელობა, მაგრამ არც ერთი მათგანი არის P-ს საკუთარი მნიშვნელობა, რადგან φ_p არ ნულდება საზღვარზე და ამიტომ არ ხვდება $\mathscr{D}(P)$-ში. აქედან გამომდინარე, P-ს ნარჩენი სპექტრი არის $\mathscr{C}$. მართლაც, ეს წარმოადგენს P-ს სრულ სპექტრს, რადგან მისი დისკრეტული და უწყვეტი სპექტრები არიან ცარიელი.

ეს მაგალითი ფიზიკოსს ტოვებს გაუგებრობაში: რადგან P არ არის თვითშეუღლებული, მისი სპექტრი პირდაპირ ინტერპრეტაციას არ ემორჩილება. მაგრამ, ის მაინც შეიცავს ინფორმაციას, რომელიც საჭიროა ფიზიკაში.

- განვიხილოთ ***წრეწირზე მოძრავი ნაწილაკი***. აშკარაა, რომ ჰილბერტის სივრცე უნდა მოიცემოდეს კვადატულად ინტეგრებადი პერიოდული ფუნქციებით, ე. ი.

$$\mathscr{H} = \left\{\psi \middle| \psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta);\ \int_0^{2\pi} d\theta |\psi|^2 < \infty\right\} \quad (136)$$

ნაწილაკის მდებარეობის ოპერატორი მოიცემა კუთხურ კოორდინატზე გამრავლებით

$$Q\psi(\theta) = \theta\psi(\theta) \quad (137)$$

ხოლო იმპულსის ოპერატორი აწარმოებს

$$\hat{P}\psi(\theta) = -i\hbar\partial\psi / \partial\theta$$

ასე განმარტებული ოპერატორები არიან თვითშეუღლებული. იმპულსის ოპერატორის სპექტრი მოიცემა თანაფარდობებით

$$\psi_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma(\hat{p}) = n\pi, \quad n \in \mathcal{Z}$$

$\{\psi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ადგენს სრულ ორთოგონალურ ბაზისს ჰილბერტის სივრცეში $L^2[0, 2\pi]$. შევნიშნოთ, რომ $\hat{Q}$ არის შემოსაზღვრუ-

ლი ოპერატორი, რადგან $\theta \in [0, 2\pi]$და Δx განუზღვრელობის გამოთვლისას ψ_n მდგომარეობაში მივიღებთ სასრულო რიცხვს, მაშინ, როცა შესაბამისი იმპულსის განუზღვრელობა იქნება 0-ის ტოლი, $\Delta p = 0$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამის მიზეზი ისაა, რომ ψ_n მდგომარეობა არ მიეკუთვნება PQ ოპერატორის დომენს, სახელდობრ, როცა ვითვლით $\hat{p}\hat{x}\psi_n = \hat{p}\left(\hat{x}\psi_n\right)$, ვხედავთ, რომ $\hat{x}\psi_n$ არ არის პერიოდული და არ შედის $\mathcal{H}$ -ში.

თვითშეუღლებულობის კრიტერიუმები

იმისათვის, რომ გავიგოთ, თუ როგორ უნდა განვავრცოთ დომენი, რომ P გახდეს თვითშეუღლებული, მოსახერხებელია გამოვიყენოთ ფონ ნეიმანის ინდექსის დეფექტის თეორია. ამ თეორიის თანახმად, თქვენ შეგიძლიათ შეისწავლოთ P^+-ის კომპლექსური საკუთარი მნიშვნელობები შემდეგნაირად: უნდა განვიხილოთ განტოლება

$$P^+\varphi_\pm = \pm i\varphi_\pm, \qquad \varphi_\pm = e^{\mp x/\hbar}$$

ან $\left(P^+ \mp iI\right)\varphi_\pm = 0$. ამიტომ $\left(P^+ \mp iI\right)$ არის ერთგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე:

$$\begin{aligned} n_-\left(P\right) &\equiv \dim Ker\left(P^+ + iI\right) = 1 \\ n_-\left(P\right) &\equiv \dim Ker\left(P^+ - iI\right) = 0 \end{aligned} \qquad (138)$$

ნატურალურ რიცხვებს $n_+\left(P\right)$ და $n_-\left(P\right)$ ეწოდება P-ს ***დეფიციტის ინდექსი.*** მათი სარგებლობა ჩანს შემდეგი კრიტერიუმიდან:

თვითშეუღლებულობის კრიტერიუმი:

A იყოს ერმიტული ოპერატორი დეფიციტის ინდექსებით n_+ და n_-.

(ა) *A არის თვითშეუღლებული მაშინ და მხოლოდ მაშინ,*

თუ $n_+ = 0 = n_-$. ამ დროს A-ს სპექტრი არის რეალური ღერძის ქვესიმრავლე.

(ბ) *A უშვებს თვითშეუღლებულ გაფართოებას (ანუ შესაძლებელია გახდეს თვითშეუღლებული მისი დომენის გაფართოებით) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $n_+ = n_-$. თუ ორივე ინდექსი დადებითია, A-ს სპექტრი არის მთელი კომპლექსური სიბრტყე.*

(გ). თუ ან $n_+ = 0 \neq n_-$ ან თუ $n_- = 0 \neq n_+$, მაშინ A ოპერატორს არ აქვს არატრივიალური თვითშეუღლებული გაფართოება. მაშინ A ოპერატორის სპექტრი არის, სათანადოდ, ზევით ან ქვევით ჩაკეტილი კომპლექსური ნახევარსიბრტყე.

(ბ) შემთხვევაში არსებობს მარტივი, კონსტრუქტიული მეთოდი შესაძლო გაფართოებებისა, ე.ი. ცხადად აღიწერება ერმიტული ოპერატორის გადაქცევა დამზერადად.

კრიტიკული შეზღუდვები ერმიტული ოპერატორის დამზერადად გადასაქცევად მოდის პრობლემის სასაზღვრო პირობებიდან კომპაქტურ (ან ნახევრად უსასრულო) ინტერვალზე და კვადრატული ინტეგრებადობიდან მთელ სივრცეში.

ოპერატორის თვითშეუღლებული გაფართოება და გამოყენებანი კვანტურ მექანიკაში

მთავარი მოსაზრებები ოპერატორების თვითშეუღლებულობისთვის

წინამდებარე განხილვაში ყველაზე არსებითი იყო ყურადღების მიქცევა იმაზე, რომ ოპერატორები მოქმედებენ გარკვეულ დომენებში. დომენები კი ჩამალულია სასაზღვრო პირობებში.

რომ ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლებები, უნდა დავადოთ რაიმე სასაზღვრო პირობები, რომლებზეც არის დამოკიდებული ამოხსნების ხასიათი. ყოველი სასაზღვრო პირობა ეთანადება რაიმე ფიზიკურად განსხვავებულ სიტუაციებს. ამიტომ, ლეგიტიმურად დაისმის კითხვა: *"როგორია სასაზღვრო პირობების შესაძლო არჩევა მოცემული ოპერატორისათვის, რომელიც წარმოადგენს დამზერადს კვანტურ მექანიკაში?"* სანამ კითხვას ვუპასუხებდეთ, გავიხსენოთ, რომ კვანტური მექანიკის დამზერადებს უნდა ჰქონდეთ ნამდვილი საკუთარი მნიშვნელობები. ეს ოპერატორები არიან ერმიტული ან თვითშეუღლებული, თუმცა, როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ, ეს ორი კონცეფცია ერთმანეთისგან განსხვავდება. კითხვაზე პასუხი გაცემული იყო ფონ ნეიმანის მიერ პიონერულ ნაშრომში კვანტური მექანიკის ოპერატორების თვითშეუღლებული გაფართოების შესახებ. განვიხილოთ ახლა გაფართოების თეორიის გამოყენება ზოგიერთი ოპერატორისათვის.

იმპულსის ოპერატორი სასრულო ინტერვალში

დამზერადის სათანადო ოპერატორისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა T, რომელიც მოქმედებს რაიმე ჰილბერტის სივრცეზე $\mathcal{H}$ (როგორც წესი, კვადრატულად ინტეგრებად ფუნქციებზე, ანუ ტალღურ ფუნქციებზე). თუ T არის დიფერენციალური

ოპერატორი, სათანადო საკუთარი განტოლების ამოსახსნელად გვჭირდება რაიმე სასაზღვრო პირობების დადება, რაც ნიშნავს, რომ T მოქმედებს რაიმე ქვესივრცეზე $\mathscr{D}(T)\in\mathscr{H}$ და არა მთელ სივრცეზე. ამ ქვესივრცეს ჰქვია T-ს ***დომენი,*** მისი ელემენტები განისაზღვრება როგორც ჰილბერტის სივრცის ელემენტები, რომლებიც აკმაყოფილებენ დადებულ სასაზღვრო პირობებს და ცხადია, რომ დომენი არ არის მთელი ჰილბერტის სივრცე $\mathscr{H}$, რადგან საზოგადოდ, $\mathscr{H}$-ში იარსებებს სხვადასხვა ელემენტები, რომლებიც არ დააკმაყოფილებენ ამ სასაზღვრო პირობებს. დომენი არის ოპერატორის განსაზღვრის სრული ნაწილი სივრცეში. ოპერატორი, მოქმედებასთან ერთად უნდა გვესმოდეს მის დომენთან ერთობლიობაში, რადგან სხვადასხვა დომენი ოპერატორს მიანიჭებს სხვადასხვა თვისებებს (სპექტრი, შემოსაზღვრულობა, თვითშეუღლებულობა და ა.შ.). ზემოთქმულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ იმპულსის ოპერატორი $P=-i\dfrac{d}{dx}$ ინტერვალში $[a,b]$ და შევისწავლოთ შემდეგი შემთხვევები:

(1) $a=-\infty, b=\infty$, (2) ორივე სასრულოა, (3) ერთი სასრულოა, მეორე – უსასრულო.

$\mathscr{L}^2$ სივრცე განისაზღვრება შემდეგი ფუნქციებისთვის

$$\mathscr{L}^2=\left\{\psi:\int_{-\infty}^{\infty}dx\left|f(x)\right|^2<\infty\right\}$$

სადაც განმარტებული გვაქვს სკალარული ნამრავლი

$$S(\psi,\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\overline{\psi}(x)\phi(x)$$

ეს ფორმა აკმაყოფილებს სკალარული ნამრავლის ყველა თვისებას, რაზეც ლაპარაკი იყო ტექსტში:

$$(1)\quad \overline{\left[S(\psi,\phi)\right]}=S(\psi,\phi)$$

$$(2)\quad S(\psi,c\phi+d\chi)=cS(\psi,\phi)+dS(\psi,\chi)$$

$$(3)\ \ (a)\, S(\phi,\phi) > 0,\ \ \phi \neq 0$$
$$(b)\, S(\phi,\phi) = 0,\ \ \phi = 0$$

ამიტომ $\mathscr{L}^2$ არის **წინა-ჰილბერტის** სივრცე. ამასთან, რადგან ის არის სრული, ის მართლაც არის ჰილბერტის სივრცე.

გვინდა ჯერ განვიხილოთ შეზღუდული ინტერვალი $a < x < b$, სადაც a და b შეიძლება იყოს სასრულო ან უსასრულო. იმპულსის ოპერატორის დომენი $\mathscr{L}^2[a,b]$-ში არის

$$\mathscr{D}\left(p;[a,b]\right) = \left\{\phi : \phi \in \mathscr{L}^2[a,b], \phi' \in \mathscr{L}^2[a,b]\right\} \quad (139)$$

ნებისმიერი ϕ-სთვის ამ დომენში და ნებისმიერი ψ-სთვის, გვაქვს

$$S(\psi, p\phi) = -i\int_a^b \bar{\psi}(x)\frac{d\phi}{dx} \quad (140)$$

ხოლო p-ს ერმიტულად შეუღლებული, ანუ p^+, აკმაყოფილებს პირობას

$$S\left(\psi, p^+\phi\right) = S(p\psi, \phi) = \overline{\left\{S(\phi, p\psi)\right\}} = \left\{\overline{-i\int_a^b dx\bar{\phi}(x)\frac{d\psi(x)}{dx}}\right\} = \quad (141)$$
$$= i\int_a^b dx\overline{\frac{d\psi(x)}{dx}}\phi(x)$$

ზედა გამოსახულების დაკლებით მივიღებთ

$$S\left(\psi, p^+\phi\right) - S(\psi, p\phi) = i\int_a^b dx\frac{d}{dx}\left\{\bar{\psi}(x)\phi(x)\right\} = i\left\{\bar{\psi}(b)\phi(b) - \bar{\psi}(a)\phi(a)\right\} \quad (142)$$

თუ მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი ხდება, მაშინ მიიღება $p = p^+$, ე.ი. p არის ერმიტული (ანუ სიმეტრიული).

ახლა განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

(1) $a = -\infty, b = \infty$

ფუნქციების კვადრატულად ინტეგრებადობა უსასრულო დომენში უზრუნველყოფს დაცემას უსასრულობაში, ამიტომ თავის დომენში ოპერატორი ერმიტულია. ეს დომენი არის

მკვრივი მთელ $\mathscr{L}^2$ სივრცეში. უფრო მეტიც, რადგან ϕ ქრება უსასრულობაში, იგივე სამართლიანია მისი წარმოებულისათვის. ამრიგად, p არა მარტო უბრალოდ ერმიტულია, არამედ არის თვითშეუღლებულიც $\mathscr{L}^2$-ში და გაგრძელების საკითხი არ აღიძვრება.

(2) a და b ორივე სასრულოა. შეგვიძლია წინასწარ ჩავატაროთ მასშტაბური გარდაქმნები ისე, რომ გავხადოთ $a=0,\quad b=2\pi$ და განვიხილოთ ოპერატორი ჰილბერტის სივრცეში $L^2\left[0,2\pi\right]$. ახლა p არ არის ერმიტული თავის დომენში (139), რადგან (142)-ის მარჯვენა მხარე არ ნულდება, საზოგადოდ. ქვედომენში

$$D\left(p;[0,2\pi]\right)=\left\{\phi:\phi\in L^2[0,2\pi],\phi'\in L^2[0,2\pi],\phi\left(0\right)=0,\phi\left(2\pi\right)=0\right\} \quad (143)$$

ის ერმიტულია, რადგან (142)-ის მარჯვენა მხარე ახლა ნულდება, მაგრამ არ არის თვითშეუღლებული, რადგან კიდეებზე ნულოვან ფუნქციას აუცილებლობით არ აქვს ნულოვანი წარმოებული ამ წერტილებში. ნებისმიერ შემდეგ დომენებში

$$D\left(p;[0,2\pi];\omega\right)=\left\{\phi:\phi\in L^2[0,2\pi],\phi'\in L^2[0,2\pi],\phi\left(0\right)=e^{i\omega}\phi\left(2\pi\right)\right\} \quad (144)$$

ის არის თვითშეუღლებული, თუკი ნამდვილი ფაზა ω ერთნაირია ყველა ϕ ფუნქციისთვის. (13)-ის მარჯვენა მხარე ნულია; მეტიც, ამ დომენში ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს ფურიეს მწკრივად,

$$\phi\left(x\right)=\exp\left(\frac{i\omega x}{2\pi}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_n e^{inx}$$

და ნათელია, რომ წარმოებულსაც აქვს ანალოგიური გაშლა, რის გამოც $\phi'\left(0\right)=e^{i\omega}\phi'\left(2\pi\right)$. ყოველი ω იძლევა p-ს სხვადასხვა თვითშეუღლებულ გაფართოებას. საკუთარი ვექტორები $\exp\left[ix\left(n+\omega/2\pi\right)\right]$ მოჭიმავენ $L^2\left[0,2\pi\right]$-ს.

(3) $a=0,b=\infty$,

ძალიან დიდი b-სთვის (2) პუნქტის განხილვა გამოდგება, მაგრამ $b\to\infty$ ზღვარში, რაკი კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქციები მიისწრაფიან ნულისკენ, ეს ნიშნავს, რომ გვჭირ-

დება მოვითხოვოთ, რომ $\phi(x)$ ქრებოდეს სათავეში, მაგრამ ვერ მოვთხოვთ იგივეს წარმოებულს. ამიტომ p არის ერმიტული დომენში, სადაც $\phi(0)=0=\phi(\infty)$, მაგრამ არ არის თვითშეუღლებული და არ აქვს გაფართოება.

(4) სიმარტივისთვის ინტერვალად ავირჩიოთ $x\in[0,1]$. იმპულსის ოპერატორის დომენი რომ განვსაზღვროთ დავუშვათ, რომ ჰილბერტის სივრცე შეიცავს კვადრატულად ინტეგრებად ფუნქციებს სასრულო ინტერვალში და რომ ფიზიკური პირობები მოითხოვენ, რომ ნაწილაკის აღმწერი ტალღური ფუნქციები ნულდებოდნენ საზღვრებზე. ამიტომ ავიღოთ ასე

$$\mathscr{D}(\hat{p})=\left\{\psi\,\middle|\,\psi(\text{ùψùù})\psi(\quad)=\quad\psi\in\mathscr{L}^2\qquad\right\} \quad (145)$$

შემდეგისთვის გავიხსენოთ ზოგიერთი ცნებები ჰილბერტის სივრციდან. ჰილბერტის სივრცე აღჭურვილია წრფივნახევრიანი შინაგანი ნამრავლით. ოპერატორს T დომენით $\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{H}$ ეწოდება სიმეტრიული, თუ სრულდება $(\xi,T\eta)=(T\xi,\eta)$, $\forall\xi,\eta\in\mathscr{D}(T)$.

გავიხსენოთ, რომ მხოლოდ ეს თანაფარდობაა მოცემული კვანტური მექანიკის არსებულ კურსებში.

აღვნიშნოთ $T^\dagger$-ით T-ს შეუღლებული ოპერატორი. მის დასახასიათებლად გვჭირდება აგრეთვე მისი დომენი. ის აკმაყოფილებს პირობას

$$T^\dagger\xi=T\xi$$

და მისი დომენი ასე განისაზღვრება

$$\mathscr{D}(T^\dagger)=\left\{\psi\in\mathscr{H}\,\middle|\,\exists\eta=T^\dagger\xi\in\mathscr{H},\forall\xi\in\mathscr{D}(T),\ (\psi,T\xi)=(\eta,\xi)\right\} \quad (146)$$

მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ეს საზოგადოდ განსხვავდება $\mathscr{D}(T)$-სგან. აგების თანახმად ჩვენ გვაქვს

$$(T^\dagger\eta,\xi)=(\eta,T\xi)\ \text{და}$$

$$(\xi,T^\dagger\eta)=(T\xi,\eta),\forall\xi\in D(T),\ \eta\in D(T^\dagger) \quad (147)$$

რომ ყოფილიყო თვითშეუღლებული, გვექნებოდა

$$T = T^{\dagger}, \qquad D(T) = D\left(T^{\dagger}\right) \quad (148)$$

განვიხილოთ ზემოყვანილი კონცეფციები იმპულსის ოპერატორის მაგალითზე $\mathscr{D}(p)$ დომენში. ვსვამთ სამ მნიშვნელოვან კითხვას:

1. არის თუ არა იმპულსის ოპერატორი $p \in \mathscr{D}(p)$ სიმეტრიული?

2. რა არის მისი შეუღლებული, უფრო ზუსტად, რა არის $\mathscr{D}\left(p^{\dagger}\right)$?

3. არის თუ არა იმპულსის ოპერატორი თვითშეუღლებული, ე. ი. სრულდება თუ არა $\mathscr{D}(p) = \mathscr{D}\left(p^{\dagger}\right)$

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად მეტად მოსახერხებელია განვმარტოთ შემდეგი სიდიდე:

$$\delta_p := (\xi, \hat{p}\eta) - (\hat{p}\xi, \eta) = -i\left(\int_0^1 \bar{\xi}\frac{d\eta}{dx}dx - \int_0^1 \frac{d\bar{\xi}}{dx}\eta dx\right) = \quad (149)$$
$$= -i\left[\bar{\xi}(1)\eta(1) - \bar{\xi}(0)\eta(0)\right]$$

სადაც ξ, η არიან ჰილბერტის $L^2[0,1]$ სივრცის აბსოლუტურად უწყვეტი ელემენტები. რომ შევამოწმოთ დასმული კითხვა, საკმარისია გამოვთვალოთ (149) $\xi, \eta \in \mathscr{D}(p)$-სთვის და დავრწმუნდეთ, რომ $\delta_p = 0$ სრულდება ნებისმიერი $\eta \in \mathscr{D}(p)$ -სთვის: რადგან $\eta \in \mathscr{D}(p)$ ნიშნავს, რომ $\eta(1) = \eta(0) = 0$, ამიტომ $\delta_p = 0$, რაიმე კერძო პირობის გარეშე ξ-ზე, გარდა იმისა, რომ უნდა იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი ელემენტი ჰილბერტის სივრცეში, რაც ნიშნავს შემდეგს

$$\mathscr{D}\left(p^{\dagger}\right) = \left\{\psi \middle| \psi \in L^2[0,1]\right\} \quad (150)$$

ახლა შევუდგეთ მესამე საკითხს: არის თუ არა $\mathscr{D}(p) = \mathscr{D}\left(p^{\dagger}\right)$.

(145)-ის და (150)-ის შედარებით მაშინვე ვასკვნით, რომ პასუხი უარყოფითია, გარდა ამისა, $D(p) \subset D\left(p^{\dagger}\right)$ არის ჰილბერტის სივრცის ქვეერთობლიობა. დასკვნა: (145)-ით განმარტებული იმპულსის ოპერატორი არ არის თვითშეუღლე-

ბული! ამ დასკვნის უშუალო შედეგი შეგვიძლია დავინახოთ მის სპექტრზე. ადვილად შევამოწმებთ, რომ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას ჩვენი იმპულსის ოპერატორისთვის, ე. ი. განტოლებას

$$\hat{p}\psi = p\psi, \qquad \psi(1) = \psi(0) = 0 \quad (151)$$

არ აქვს ნამდვილი საკუთარი მნიშვნელობა, რაც ცხადყოფს, რომ ($\hat{p}, \mathscr{D}(\hat{p})$) არ არის თვითშეუღლებული ოპერატორი.

ეს ხდება იმიტომ, რომ შეუღლებული ოპერატორის დომენი არის ძალიან დიდი, ვიდრე თვითონ ოპერატორისა. ბუნებრივად დაისმის შემდეგი კითხვა: არსებობს კი დომენი, რომელშიც $\hat{p}$ შეიძლება გახდეს თვითშეუღლებული?

რომ გავარკვიოთ პასუხი, შევისწავლოთ სხვა დომენი, კერძოდ, ასეთი

$$\mathscr{D}_\theta(\hat{p}) = \left\{\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0), \psi \in L^2[0,1]\right\} \quad (152)$$

სადაც $\theta \in \mathscr{R} \bmod 2\pi$; გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ $\psi(0) \neq 0$, სხვა მხრივ (152) დაიდოდა (149)-ზე. ჩვენ კვლავ უნდა ვუპასუხოთ სამ კითხვას $\mathscr{D}_\theta(\hat{p})$-ში. (29)-ის ანალოგიურად, ახლა გვექნება

$$\delta_p = -i\left[\bar{\xi}(1)\eta(1) - \bar{\xi}(0)\eta(0)\right] = -i\left[e^{-i\theta}\bar{\xi}(0)e^{i\theta}\eta(0) - \bar{\xi}(0)\eta(0)\right] = 0, \quad (153)$$

ანუ $\hat{p}$ სიმეტრიულია (152)-ში.

მეორე კითხვაზე პასუხისთვის განვიხილოთ $\eta \in D_\theta(p)$ და ვიპოვოთ ყველა შესაძლო ξ ისე, რომ მივიღოთ $\delta_p = 0$. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$\delta_p = -i\left[\bar{\xi}(1)\eta(1) - \bar{\xi}(0)\eta(0)\right] = 0 \quad (154)$$

რადგან $\eta \in D_\theta(p)$ ნიშნავს, რომ $\eta(1) = e^{i\theta}\eta(0)$, ვღებულობთ

$$\eta(0)\left[\bar{\xi}(1)e^{i\theta} - \bar{\xi}(0)\right] = 0, \Rightarrow \bar{\xi}(1) = e^{i\theta}\xi(0) \quad (155)$$

ამრიგად, გვაქვს შეუღლებულის დომენი

$$D_\theta\left(\hat{p}^\dagger\right) = \left\{\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0), \quad \psi \in L^2[0,1]\right\}$$

ნათელია, რომ $D_\theta\left(\hat{p}^\dagger\right)=D_\theta\left(p\right)$ და გვაქვს დადებითი პასუხი კითხვაზე.

შევხედოთ ახლა საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას

$$\hat{p}\psi = p\psi, \qquad \psi\left(1\right)=e^{i\theta}\psi\left(0\right) \quad (156)$$

კვადრატულად ინტეგრებადი ამოხსნაა

$$\psi_n\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{ipx}, \qquad p=2n\pi+\theta \quad (157)$$

სადაც $n\in\mathcal{Z}$ და $\left\{\psi_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს $L^2\left[0,1\right]$-ში. ვხედავთ, რომ θ-პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისთვის სპექტრი სხვადასხვაა, ანუ გვაქვს იმპულსის ოპერატორის არაეკვივალენტური დაკვანტვის ერთპარამეტრიანი ოჯახი სასრულო ინტერვალში.

ფონ-ნეიმანის მეთოდი: სიმეტრიული ოპერატორის თვითშეუღლებული გაფართოება

ზემოთ ვნახეთ, რომ იმპულსის ოპერატორი არ არის თვითშეუღლებული (145) დომენში, მაგრამ დომენის სათანადო შერჩევით, მაგ. (152), ის შეიძლება გავხადოთ თვითშეუღლებული. მაგრამ, (152) დომენი შემოტანილი იყო რაიმე ფიზიკური ან მათემატიკური მოტივაციის გარეშე. ახლა შევეცდებით შემოვიყვანოთ თვითშეუღლებული გაფართოების მეთოდი (ინიცირებული ფონ ნეიმანის მიერ) და ვაჩვენებთ, რომ (152) დომენი სინამდვილეში არის (145) დომენის გაფართოება.

დავიწყოთ რაიმე მოცემული T ოპერატორით, რომლის დომენია $\mathscr{D}\left(T\right)$ და დავსვათ შემდეგი კითხვები:

1. არის თუ არა სიმეტრიული ოპერატორი T თვითშეუღლებული $\mathscr{D}\left(T\right)$-ში?
2. თუ ის არ არის თვითშეუღლებული, შეგვიძლია თუ არა ის გავხადოთ ასეთი?

3. თუ ის შეიძლება გავხადოთ თვითშეუღლებული, რა არის მისი შესაფერისი დომენი თვითშეუღლებულობისთვის?

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად გამოვიყენოთ უკვე ცნობილი თეორემები და ვაჩვენოთ შედეგები მაგალითებზე.

დაგვჭირდება რაიმე ცნებები თვითშეუღლებულობასა და მის დარღვეაზე.

სიმეტრიული T ოპერატორისათვის განვიხილოთ შემდეგი განტოლებები:

$$T^{\dagger}\psi_{\pm} = \pm i\psi_{\pm}, \qquad \psi_{\pm} \in \mathscr{D}\left(T^{\dagger}\right) \quad (158)$$

და დავუშვათ, რომ ნატურალური რიცხვები $n_{\pm}$ აღნიშნავდნენ (158) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კვადრატულად ინტეგრებადი ამოხსნების რაოდენობას. ნატურალური რიცხვების წყვილს $\left(n_{+}, n_{-}\right)$ უწოდებენ T ოპერატორის **დეფიციტის ინდექსებს.** ისინი გვიჩვენებენ T ოპერატორის გადახრის ზომას თვითშეუღლებულობიდან. სახელდობრ, შევნიშნოთ, რომ სწორი თვითშეუღლებული ოპერატორისთვის დეფიციტის ინდექსები უნდა იყოს ნულის ტოლი, რადგან ასეთი ოპერატორის სპექტრი შეიცავს მხოლოდ ნამდვილ რიცხვებს. სწორედ ეს ცნება არის გამოყენებული ოპერატორების კლასიფიკაციისთვის. საზოგადოდ, შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ სამი კლასი ოპერატორებისა სამი “ფიზიკური” სიტუაციის მიხედვით:

1. T ოპერატორი არის არსებითად თვითშეუღლებული, თუ $\left(n_{+}, n_{-}\right) = (0,0)$, ანუ ვიტყვით, რომ T ოპერატორს აქვს ერთადერთი თვითშეუღლებული გაფართოება.

2. თუ $n_{+} = n_{-}$, ოპერატორი არ არის თვითშეუღლებული, მაგრამ უშვებს გაფართოებებს.

3. როცა $n_{+} \neq n_{-}$, ოპერატორი არ არის თვითშეუღლებული და არ აქვს თვითშეუღლებული გაფართოებები.

იმპულსის ოპერატორის თვითშეუღლებული გაფართოება

ვნახოთ ახლა რას იძლევა ყოველივე ეს ადრე განხილული თვისებებისთვის იმპულსის ოპერატორის მაგალითზე. ჯერ შევისწავლოთ $\hat{p}$ ოპერატორი $D(\hat{p})$ დომენში. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $D(\hat{p}^\dagger)$ მოიცემა (145)-ით. დეფიციტის ინდექსების საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ განტოლებები

$$-i\frac{d\psi_\pm}{dx} = \pm i\psi_\pm, \qquad \psi_\pm \in D(\hat{p}^\dagger) \quad (159)$$

[0,1] ინტერვალში ამ განტოლებათა კვადრატულად ინტეგრებადი ამოხსნებია

$$\psi_+(x) = C_+e^{-x}, \quad \Rightarrow n_+ = 1$$
$$\psi_-(x) = C_-e^{x}, \ \Rightarrow n_- = 1$$

რაც ეთანხმება იმ ფაქტს, რომ $\hat{p}$ არ არის თვითშეუღლებული, მაგრამ უშვებს გაფართოებებს. უნდა არსებობდეს სათანადო დომენი, ანუ უკეთესად რომ ვთქვათ, მისი დომენის მოსახერხებელი გაფართოება, რომელშიც ოპერატორი $\hat{p}$ გახდება თვითშეუღლებული. მსგავსი საკითხი უკვე განხილული გვქონდა ზემოთ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებასთან ერთად. ახლა ვიხილავთ ფონ ნეიმანის თეორიის კუთხით.

გავარკვიოთ, რისი ტოლია დეფიციტის ინდექსი $\hat{p}$ ოპერატორისთვის $D_\theta(\hat{p})$ დომენში, (იხ. (152)). აქ ჩვენ გვაქვს $D_\theta(\hat{p}) = D_\theta(p^\dagger)$, ხოლო დეფიციტის ინდექსი მოიძებნება განტოლებათა ამოხსნით

$$-i\frac{d\psi_\pm}{dx} = \pm i\psi_\pm, \qquad \psi_\pm(1) = e^{i\theta}\psi(0)$$

ამ განტოლებებს არ აქვთ კვადრატულად ინტეგრებადი ამოხსნა ნამდვილი p-სთვის, რაც ნიშნავს, რომ $n_+ = n_- = 0$, ე.ი. $\hat{p}$ არის თვითშეუღლებული $D_\theta(\hat{p})$-ზე. ეს შედეგი თანხმობაშია ჩვენს მიერ ადრე მიღებულ შედეგთან.

ახლა გავაანალიზოთ ოპერატორების მეორე ტიპი, სახელდობრ, სიმეტრიული ოპერატორი T დომენში $D(T)$ დეფიციტის ინდექსით $n_+ = n_- = n$. ასეთი ოპერატორი არ არის თვითშეუღლებული, მაგრამ უშვებს თვითშეუღლებულ გაფართოებას. უნდა არსებობდეს მისი დომენის შესაფერი გაფართოება, რათა ოპერატორი გახდეს თვითშეუღლებული. ამაში მდგომარეობს ფონ ნეიმანის მეთოდის ძირითადი შედეგი.

რაც შეეხება იმპულსის ოპერატორს $P = -i\hbar D, \qquad D \equiv \frac{d}{dx}$,

ფიზიკური სიტუაციის სათანადოდ განსახილავი გვექნება სამი შემთხვევა:

a) *P ოპერატორი მთელ ნამდვილ ღერძზე*

ფონ ნეიმანის განტოლებას აქვს სახე

$$P^{\dagger}\psi_{\pm}(x) = -i\hbar / d\,\psi_{\pm}(x), \quad (160)$$

სადაც d დადებითი პარამეტრი შემოყვანილია სიგრძის განზომილების დასაკომპენსირებლად, ხოლო ცხადი სახით ამოხსნაა $\psi_{\pm}(x) = C_{\pm}e^{\mp x/d}$. ახლა განვიხილავთ სხვადასხვა ინტერვალს $[a,b]$. ჩანს, რომ არც ერთი ფუქციათაგანი $\psi_{\pm}$ არ მიეკუთვნება ჰილბერტის $L^2(\mathscr{R})$ სივრცეს, ერთ მხარეს $(x = -\infty)$ თუ კლებადია, მეორე მხარეს ზრდადია $(x = +\infty)$, ანუ დეფიციტის ინდექსია (0,0).

ამიტომ ვასკვნით, რომ $(P, D_{\max}(\mathscr{R}))$ ოპერატორი არის თვითშეუღლებული. უფრო მეტიც, ამ ოპერატორის სპექტრი ნამდვილ ღერძზე არის უწყვეტი, ანუ არ აქვს საკუთარი მნიშვნელობები.

b) *P ოპერატორი დადებით ნახევარღერძზე:* მოყვანილი ამოხსნებიდან მხოლოდ ψ_+ მიეკუთვნება $L^2(0,\infty)$ სივრცეს და ამიტომ დეფიციტის ინდექსია (1,0). ფონ ნეიმანის თეორემის თანახმად ასეთ ოპერატორს არ გააჩნია თვითშეუღლებული გაფართოება. ეს საკმაოდ მოულოდნელია, რადგან იმპულსის ოპერატორი არ გამოდის დამზერადი აღნიშნულ სიტუაციაში.

c) *P ოპერატორი სასრულო ინტერვალში* [0,1]

რაკი სასრულოა ინტერვალი, ორივე ამოხსნა $\psi_{\pm}$ მიეკუთვნება ჰილბერტის $L^2([0,1])$ სივრცეს და დეფიციტის ინდექსია (1,1). ფონ ნეიმანის თეორემა გვეუბნება, რომ თვითშეუღლებული გაფართოება პარამეტრიზებულია $U(1)$-ით, ანუ ფაზით $e^{i\theta}$, ჩვენს მიერ ადრე განხილული მაგალითის შესაბამისად. მაშინდელივით, ეს გაგრძელებანი აღვნიშნოთ ასე $P_{\theta}=(P,\mathscr{D}_{\theta})$, რომლებიც მოიცემა ფორმულებით:

$$D_{\theta}=\left\{\psi\in D_{\max}(0,1),\psi(1)=e^{i\theta}\psi(0)\right\},\qquad \theta\in[0,2\pi] \quad (161)$$

გარდა ამისა, სპექტრი არის მთლიანად დისკრეტული. ამ სასაზღვრო პირობის გამოყენებისას ადვილად დავადგენთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლების ამოხსნებს:

$$\begin{gathered}P_{\theta}\phi_n(x,\theta)=2\pi\hbar v\phi_n(x,\theta),\\ v=n+\frac{\theta}{2\pi},\quad n=0,\pm1,\pm2,...,\end{gathered} \quad (162)$$

$$\phi_n(x,\theta)=\exp[2i\pi vx],\quad (\phi_m,\phi_n)=\delta_{mn} \quad (163)$$

რაკი ფაზა θ გაჩნდა ამოხსნაში, სისტემის იმპულსის ნებისმიერი გაზომვა, საზოგადოდ, დამოკიდებული იქნება მასზე.

ჰამილტონიანის თვითშეუღლებული გაფართოება

განვიხილოთ თავისუფალი ნაწილაკის ჰამილტონიანი

$$H=-\frac{d^2}{dx^2}=-D^2 \quad (164)$$

და ვიმუშაოთ ჰილბერტის სივრცეში $L^2(a,b)$, მაქსიმალური დომენი იყოს $D_{\max}(a,b)$. დეფიციტის ინდექსის გამოსათვლელად უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$-D^2\phi(x)=\pm ik_0^2\phi(x),\qquad k_0>0 \quad (165)$$

ვლებულობთ

$$\phi_{\pm} = a_{\pm} e^{k_{\pm} x} + b_{\pm} e^{-k_{\pm} x}, \qquad k_{\pm} = \frac{(1 \mp i)}{\sqrt{2}} k_0 \quad (166)$$

ჰამილტონიანი მთელ რეალურ ღერძზე

ჰილბერტის სივრცეა $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{R})$. ვხედავთ, რომ $\phi_{\pm} \notin \mathcal{H}$, ამიტომ დეფიციტის ინდექსებია (0,0), საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნამდვილ ღერძზე ჰამილტონიანი თვითშეუღლებულია და აქვს მთლიანად უწყვეტი სპექტრი....

ჰამილტონიანი დადებით ნახევარღერძზე

განვიხილოთ ახლა თავისუფალი ნაწილაკი უსასრულო კედლის წინ, როცა $x<0$. მაშინ

(165) განტოლების ამოხსნა ჰილბერტის სივრცეში $\mathcal{H} = L^2(0,+\infty)$ იქნება

$$\phi_{\pm} = b_{\pm} e^{-k_0 x/\sqrt{2}} e^{\pm i k_0 x/\sqrt{2}}$$

რასაც ეთანადება დეფიციტის ინდექსი (1,1) და ამიტომ უსასრულოდ ბევრი თვითშეუღლებული გაფართოება პარამეტრიზებული $U(1)$-ით. შესაბამისი სასაზღვრო პირობებია

$$\left[\phi'(0) - i\phi(0)\right] = e^{i\alpha}\left[\phi'(0) + i\phi(0)\right], \qquad \alpha \in [0, 2\pi],$$

რაც ეკვივალენტურია პირობებისა

$$\phi(0) = \lambda\phi'(0), \quad \lambda = -tg(\alpha/2), \quad \lambda \in \mathcal{R} \cup \{\infty\} \quad (167)$$

სასაზღვრო პირობას $\phi'(0) = 0$ ეთანადება პირობა $\lambda = \infty$.

ახლა განვსაზღვროთ ენერგიის სპექტრი ნაწილაკისა, რომელიც დატყვევებულია არეში $x \geq 0$. თუ ნაწილაკის ენერგია დადებითია, შეგვიძლია გამოვთვალოთ არეკვლის კოეფიციენ-

ტი უსასრულოდ მაღალ ბარიერზე და შევადაროთ გაგრძელებულს. ტალღური ფუნქცია არის

$$\phi(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (168)$$

განვმარტოთ არეკვლის ამპლიტუდა და არეკვლის ალბათობა შემდეგნაირად

$$r(k) = \frac{A}{B}, \qquad R(k) = \left|r(k)\right|^2$$

(167) სასაზღვრო პირობას თუ დავადებთ, მივიღებთ

$$r(k) = -\frac{1+i\lambda k}{1-i\lambda k} \;\Rightarrow\; R(k) = 1 \quad (169)$$

აღსანიშნავია, რომ ფიზიკური შედეგი (ანუ $R = 1!$) ყველა გაფართოებისთვის არის ერთნაირი: კედელი იქცევა, როგორც იდეალური ამრეკლავი.

ასე არ ხდება ბმული მდგომარეობებისთვის

$$E = -\frac{\hbar^2 \rho^2}{2m}, \qquad \rho > 0, \qquad \phi(x) = Ae^{-\rho x},$$

რისთვისაც (167) ნიშნავს $(1+\lambda\rho)A = 0$. ბმულ მდგომარეობას ეთანადება $\rho = -1/\lambda$ მხოლოდ როცა $\lambda < 0$. მისი ენერგია და ნორმირებული ტალღური ფუნქციაა

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2}, \quad \lambda < 0, \qquad \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{|\lambda|}}e^{-x/\lambda} \quad (170)$$

ექსპერიმენტულად შესაძლო რომ იყოს უსასრულოდ მაღალი კედლის მომზადება, არსებობა (ან არსებობა) ამ უარყოფითი ენერგიისა იქნებოდა მაჩვენებელი თვითშეუღლებული გაფართოებისა.

ჰამილტონიანი სასრულო ინტერვალში

უკანასკნელი შემთხვევა შეესაბამება ნაწილაკს ორმოში: $x \in [0, L]$. ვიწყებთ ოპერატორით $\left(H, \mathscr{D}_0(H)\right)$, ისეთით, რომ

$$D_0(H)=\{\phi\in D_{\max},\phi(0)=\phi(L)=\phi'(0)=\phi'(0)\},$$

რომელიც არის მკვრივად განსაზღვრული და მისი შეუღლე-ბულია

$$H^\dagger=H,\qquad D(H^\dagger)=D_{\max}(0,L)$$

რადგან (165)-ის ყველა ამოხსნა მიეკუთვნება $L^2(0,L)$-ს, დეფიციტის ინდექსია (2,2) და გაფართოებას ვაპარამერიზებთ $U(2)$ მატრიცით.

თვითშეუღლებული გაფართოების აღსაწერად ბუნებრივ-ია შემოვიტანოთ წრფივნახევრიანი ფორმა ვექტორებისთვის $\phi,\psi\in D_{\max}(0,L)$

$$B(\phi,\psi)=\frac{1}{2i}\left[\left(H^\dagger\phi,\psi\right)-\left(\phi,H^\dagger\psi\right)\right]\quad(171)$$

რომელიც დამოკიდებულია მარტო სასაზღვრო მნიშვნელო-ბებზე. ვნახოთ $\psi=\phi$, გვაქვს

$$B(\phi,\phi)=\frac{1}{2i}\left[\phi'(L)\bar{\phi}(L)-\phi(L)\bar{\phi}'(L)-\phi'(0)\bar{\phi}(0)+\phi(0)\bar{\phi}'(0)\right]\quad(172)$$

რომელიც მიიყვანება სახეზე

$$\begin{aligned}4LB(\phi,\phi)=&\left|L\phi'(0)-i\phi(0)\right|^2+\left|L\phi'(L)+i\phi(L)\right|^2-\\&-\left|L\phi'(0)+i\phi(0)\right|^2-\left|L\phi'(L)-i\phi(L)\right|^2\end{aligned}\quad(173)$$

თვითშეუღლებული გაფართოების დომენი არის $D_{\max}(0,L)$ -ის მაქსიმალური ქვესივრცე, რომელზეც $B(\phi,\phi)$ ფორმა ნულდება. ეს გაფართოებები პარამეტრიზებულია უნიტარული მატრიცით U და ალვნიშნავთ $H_U=(H,\mathscr{D}(U))$, რომელშიც $\mathscr{D}(U)$ არის სივრცული ფუნქციები ϕ და აკმაყოფილებენ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\begin{pmatrix}L\phi'(0)-i\phi(0)\\L\phi'(L)+i\phi(L)\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}L\phi'(0)+i\phi(0)\\L\phi'(L)-i\phi(L)\end{pmatrix}\quad(174)$$

ეს სასაზღვრო პირობები აღწერს ყველა თვითშეუღლებულ

გაფართოებას $H_U = \left(H, \mathscr{D}\left(U\right)\right)$ ნაწილაკისა ორმოში. ამასთან ნაიმარკის თეორემის თანახმად ყველა მის გაფართოებას გააჩნია დისკრეტული სპექტრი.

უსასრულო პოტენციალური კედელი. ფორმალიზმის გამოყენება

ზემოთ განხილული პარადოქსებიდან თავიდან განვიხილოთ უკანასკნელი პარადოქსი განსხვავებული კუთხით. განვიხილოთ ასეთი სტანდარტული ამოცანა:

ნაწილაკი m მასით მოძრაობს უსასრულოდ მაღალ ერთგანზომილებიან პოტენციალურ კედელში სიგანით L:

$$V\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\in\left(-L/2,+L/2\right)\\ \infty, & \left|x\right|\geq L/2\end{cases} \qquad (175)$$

სტაციონარული მდგომარეობები მოიძებნება შრედინგერის განტოლებით $H\phi\left(x\right)=E\phi\left(x\right)$

და დავადოთ ნულოვანი სასაზღვრო პირობები ტალღურ ფუნქციებს ორივე კიდეზე. ეს ნიშნავს, რომ თავისუფალი ნაწილაკის შემოუსაზღვრელი ჰამილტონიანი ჩაკეტილ ინტერვალში $\left[-L/2,+L/2\right]$ განისაზღვრება თანაფარდობით

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}D^2, \qquad D\equiv d/dx$$

ხოლო დომენია

$$\mathscr{D}\left(H\right)=\left\{\phi, H\phi\in L^2\left(-\frac{L}{2},+\frac{L}{2}\right), \phi\left(\pm L/2\right)=0\right\} \quad (176)$$

გვექნება ნორმირებული ტალღური ფუნქციების ორი კრებული არეში $\left[-L/2,+L/2\right]$ და ნულოვანი მის გარეთ, რომლებიც ასე ჩაიწერება

კენტი ფუნქციები:

$$\Phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\qquad E_n=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \quad (177)$$

და ლუწი ფუნქციები:

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{(2n-1)n\pi}{L}\right),\qquad E_n'=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2n-1)n\pi}{L}\right)^2$$

სადაც n არის დადებითი მთელი რიცხვი. ფუნქციები $\Phi_n(\Psi_n)$ არიან უწყვეტი ინტერვალის ბოლოებზე, სადაც ისინი ნულდებიან.

ისმის კითხვა: არის თუ არა ჰამილტონის ოპერატორი თვითშეუღლებული ოპერატორი?

უფრო დაწვრილებით გასააზრებლად განვიხილოთ ეს ნაწილაკი მდგომარეობაში, რომელიც არის განსაზღვრული ლუწი ნორმირებული ტალღური ფუნქციით:

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=-\sqrt{\frac{30}{L^5}}\left(x^2-\frac{L^2}{4}\right), && |x|\le\frac{L}{2}\\ \Psi(x)&=0, && |x|\ge\frac{L}{2}\end{aligned} \quad (178)$$

ეს ტალღური ფუნქცია შერჩეულია ისე, რომ იმყოფება (176) დომენში, გარდა $H\phi$ ზემოქმედებისა. გავშალოთ ეს ფუნქცია საკუთარი ფუნქციების მოყვანილ სრულ კრებულში

$$\Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\Psi_n(x),\qquad b_n=(\Psi_n,\Psi)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \quad (179)$$

(მიიღება უშუალო გამოთვლით) განვმარტოთ აგრეთვე ორჯერ წარმოებული, ანუ ჰამილტონიანის მოქმედება არჩეულ მდგომარეობაზე

$$\tilde{\Psi}(x)\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}D^2\Psi(x)=\frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{30}{L^5}}\qquad -L/2<x<+L/2$$

ჩავატაროთ ახლა ზოგიერთი ცხადი გამოთვლა: ენერგიის საშუალო მნიშვნელობა და მისი კვადრატული გადახრა მოცემულ მდგომარეობაში, ერთის მხრივ იქნება

$$\left\langle E\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|^2 E_n'=\frac{480\hbar^2}{m\pi^4L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^4}=\frac{5\hbar^2}{mL^2} \quad (180)$$

მაგრამ, მეორეს მხრივ,

$$\left\langle E\right\rangle=\left(\Psi,H\Psi\right)=-\frac{30\hbar^2}{mL^5}\int_{-L/2}^{+L/2}\left(x^2-\frac{L^2}{2}\right)dx=\frac{5\hbar^2}{mL^2}=\frac{10}{\pi^2}E_1'$$

ეს შედეგები ურთიერთშეთანხმებულია. მაგრამ, შედეგები განსხვავდება ენერგიის საშუალო ფლუქტუაციებისთვის. ერთის მხრივ

$$\left\langle E^2\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|^2\left(E_n'\right)^2=\frac{240\hbar^4}{m^2\pi^2L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}=\frac{30\hbar^4}{m^2L^4} \quad (181)$$

რაც გვაძლევს

$$\Delta E\equiv\sqrt{\left\langle E^2\right\rangle-\left\langle E\right\rangle^2}=\sqrt{5}\,\frac{\hbar^2}{mL^2} \quad (182)$$

ხოლო, მეორეს მხრივ,

$$\left\langle E^2\right\rangle=\left(\Psi,H^2\Psi\right)=\left(\Psi,H\tilde{\Psi}\right)=0 \;\; !!!$$

ამ პარადოქსში გასარკვევად დავუბრუნდეთ განმარტებებს: ალბათობა იმისა, რომ ϕ_n მდგომარეობაში გვაქვს ε_n ენერგია, მოიცემა თანაფარდობით $\left|\left(\phi_n,\Psi\right)\right|^2$, რაც გვაძლევს

$$\left\langle E^2\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2\left|\left(\phi_n,\Psi\right)\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2\left(\phi_n,\Psi\right)\left(\Psi,\phi_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H\phi_n,\Psi\right)\left(\Psi,H\phi_n\right)$$

სადაც გამოყენებულია ჰამილტონიანის საკუთარ მნიშვნელობათა ნამდვილობა. ჰამილტონიანი H რომ ყოფილიყო თვითშეუღლებული, ჩაკეტილობის პირობის დახმარებით ვიპოვიდით თანაფარდობას

$$\left\langle E^2\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi_n,H\Psi\right)\left(H\Psi,\phi_n\right)=\left(H\Psi,H\Psi\right)=\left(\tilde{\Psi},\tilde{\Psi}\right)=\frac{30\hbar^4}{m^2L^4}\text{, (183)}$$

რაც ემთხვევა პირდაპირ გამოთვლილს. მაგრამ, თუ H-ის თვითშეუღლებულობას კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ, მიიღება

$$\left\langle E^2\right\rangle=\left(H\Psi,H\Psi\right)=\left(\Psi,H^2\Psi\right)=0 \quad (184)$$

ეს კი ტყუილია.

სინამდვილეში (183)-ში ჩვენ კორექტულად (ნაჩვენებია ნაწილობრივი ინტეგრაციით) გამოვიყენეთ H-ის თვითშეუღლებულობა, როცა ის მოქმედებდა ფუნქციებზე, რომლებიც ქრებიან კედლის ორივე კიდურა წერტილებზე

$$\left(H\phi_n,\Psi\right)=\left(\phi_n,H\Psi\right), \qquad \left(\Psi,H\phi_n\right)=\left(H\Psi,\phi_n\right)$$

ამის საწინააღმდეგოდ, (184)-ში $\tilde{\Psi}$ ფუნქცია არ მიეკუთვნება ამ კრებულს (ეს ის შემთხვევაა, როცა $A\psi$ არ არის A ოპერატორის დომენში!), ნაწილობრივი ინტეგრაციისას ზედაპირული წევრი გადარჩება და $\left(H\Psi,\tilde{\Psi}\right)\neq\left(\Psi,H\tilde{\Psi}\right)$. ეს მარტივი გამოთვლები აჩვენებს, რომ პრობლემა მდგომარეობს H ოპერატორის მოქმედებაში $\tilde{\Psi}$ ფუნქციაზე, რომელიც არ ქრება კიდურა წერტილებზე. როგორც უკვე ვიცით, დომენის სწორი არჩევა არის გადამწყვეტი თვითშეუღლებული გაფართოების დასამტკიცებლად.

თავისუფალი ერთგანზომილებიანი ჰამილტონიანის მაგალითი

არსებულ სახელმძღვანელოებში დაშვებული ძირითადი უზუსტობა გამოწვეულია იმ რწმენით, რომ თუ A არის ოპერატორი და თუ $A\varphi$ მიეკუთვნება ჰილბერტის სივრცეს, მაშინ φ-ც მიეკუთვნება A-ს დომენს. ცნობილია, რომ ასე იშვიათად ხდება: საზოგადოდ, ფუნქციათა ერთობლიობა, რომლისთვი-

საც $A\varphi$ მიეკუთვნება ჰილბერტის სივრცეს, არის გაცილებით ფართო. დომენის დაზუსტება საჭიროა იმიტომ, რომ გვინდა ოპერატორი იყოს თვითშეუღლებული. ამავე დროს, ვიცით, რომ ერთნაირი მოქმედების დროსაც კი მიიღება სხვადასხვა თვითშეუღლებული ოპერატორი, თუ მათ სხვადასხვა დომენ-ები აქვთ.

სიცხადისათვის ეს პრობლემა გავხსნათ მაგალითის განხ-ილვით. განვიხილოთ თავისუფალი ნაწილაკის ჰამილტონიანი ანუ კინეტიკური ენერგიის ოპერატორი ერთგანზომილებიან ნახევარ წრფეზე. ჰამილტონიანია

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

და განვიხილოთ $\varphi(x)$ ფუნქციათა სიმრავლე ინტერვალ-ში $0 \le x < \infty$, ისეთი, რომ $\int_0^\infty \left|\varphi(x)\right|^2 dx$ იყოს სასრული, ანუ კვადრატულად ინტეგრებადი. ფუნქციათა ასეთი სისტემა ად-გენს ჰილბერტის სივრცეს, $L_2[0,\infty]$. ამ სივრცეში არიან ფუნ-ქციები, რომელთათვის $\int_0^\infty \left|-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right|^2 dx = \infty$

ამიტომ H_0 ოპერატორმა უნდა გამოტოვოს ჰილბერტის სივრციდან ზოგიერთი ფუნქცია, $\varphi(x)$.

მაგრამ მარტო პირობა, რომ $A\varphi$ მიეკუთვნებოდეს ჰილ-ბერტის სივრცეს ფიზიკის თვალსაზრისით არ არის საკმარისი. უნდა მოვითხოვოთ, რომ ნაწილაკის მოძრაობა შეზღუდულია $0 \le x < \infty$ არით, ანუ გვაქვს უსასრულო ბარიერი $x = 0$ წერ-ტილში, რის გამოც უნდა შევზღუდოთ პირობით $\varphi(0) = 0$. თურმე მათემატიკურად ეს შეზღუდვა ხდის H_0 ოპერატორს თვითშეუღლებულად.

რადგან მოგვიწევს ნაწილობითი ინტეგრაციების ჩატარება,

ჩვენ უნდა გამოვრიცხოთ კიდევ სხვადასხვა ჯურის ფუნქციე-ბი $L_2\left[0,\infty\right]$-დან, თუნდაც იყვნენ კვადრატულად ინტეგრება-დი, თუ ისინი არ ეცემიან ნულისკენ უსასრულობაში, როცა $x\to\infty$. ასეთნაირად ნაპოვნ ერთობლიობას $L_2\left[0,\infty\right]$-ში და-ვარქვათ Ω. განვიხილოთ ახლა ორი ფუნქცია $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$, ისეთი, რომ $\varphi_1(0)=0$, მაგრამ $\varphi_2(0)\neq 0$ ორივე Ω-დან და განვიხილოთ მატრიცული ელემენტი

$$\left(\varphi_2, H_0\varphi_1\right)=\int\limits_0^\infty \varphi_2^*(x)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right]dx \quad (185)$$

H_0-ის შეუღლებული მოიძებნება ნაწილობითი ინტეგრაცი-ით და $\varphi_2^*(x)$-ზე მოქმედებით

(ავიღოთ $\hbar^2/2m=1$), მიიღება

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi_2^*(x)\left(\frac{d}{dx}\varphi_1(x)\right)\right]=\frac{d\varphi_2^*(x)}{dx}\frac{d\varphi_1(x)}{dx}+\varphi_2^*(x)\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} \quad (186)$$

და

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\varphi_2^*(x)}{dx}\right)\left(\varphi_1(x)\right)\right]=\frac{d\varphi_2^*(x)}{dx}\frac{d\varphi_1(x)}{dx}+\frac{d^2\varphi_2^*(x)}{dx^2}\varphi_1(x) \quad (187)$$

თუ ახლა განვიხილავთ მათ სხვაობას, ვიპოვით

$$\begin{aligned}-\frac{d^2\varphi_2^*(x)}{dx^2}\varphi_1(x)&=\\&=\varphi_2^*(x)\left[-\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left(\varphi_2^*(x)\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi_2^*(x)}{dx}\varphi_1(x)\right)\end{aligned} \quad (188)$$

ორივე მხარის ინტეგრაცია მოგვცემს

$$-\int\limits_0^\infty\frac{d^2\varphi_2^*(x)}{dx^2}\varphi_1(x)dx-\int\limits_0^\infty\varphi_2^*(x)\left[-\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\right]dx=\varphi_2^*(0)\frac{d\varphi_1(0)}{dx}-\frac{d\varphi_2^*(0)}{dx}\varphi_1(0) \quad (189)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ორივე $\varphi_2^*(0)$ და $\varphi_1(0)$ იქნებოდნენ ნულები, დაგვრჩებოდა

$$\int_0^\infty \left[-\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}\right]^* \varphi_1(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi_2^*(x)\left[-\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\right]dx, \quad (190)$$

ანუ $\left(H_0\varphi_2, \varphi_1\right) = \left(\varphi_2, H_0\varphi_1\right)$ (191)

ამ თანაფარდობის მიღებისას არსებითი იყო ის, რომ სასაზღვრო პირობა $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}\left(A^\dagger\right) \varphi_1(x)$ ფუნქციისათვის მარჯვნივ ზუსტად იგივე ავიღეთ, რაც $\varphi_2(x)$ ფუნქციისათვის მარცხნივ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როცა ოპერატორის მოქმედება და დომენი მარჯვნივ და მარცხნივ ერთმანეთს ემთხვევა, ოპერატორი არის თვითშეუღლებული. ამრიგად, $-d^2/dx^2$ ოპერატორი განსაზღვრული Ω სივრცის ფუნქციებისთვის Ω' დომენში, რომლებიც ნულდებიან სათავეში, არის თვითშეუღლებული. (Ω იყო $L_2[0,\infty]$ სივრცის ქვესიმრავლე, რომელშიც კიდევ გამოიყოფა Ω' ქვესიმრავლე, სადაც ორივე ფუნქცია სათავეში ნული ხდება).

სხვა ოპერატორს მოვძებნით, თუ დავადებთ Ω ფუნქციებს ახალ პირობებს: $\varphi_1(0) = 0$ და $d\varphi_1(0)/dx = 0$. ამ ოპერატორს ეწოდება ერმიტული, მაგრამ ის არ არის თვითშეუღლებული, რადგან $\varphi_2^*(0)$ და $d\varphi^*{}_2(0)/dx$ სიდიდეებმა შეიძლება მიიღონ ნებისმიერი სასრულო მნიშვნელობა და ამიტომ (190) განტოლება აღარ დაკმაყოფილდება, ე.ი. შეუღლებულის დომენი არის ყველა ფუნქცია Ω-ში, რომლებიც შიგ (იქ) რჩებიან $-d^2/dx^2$ ოპერატორის მოქმედებით.

გავიხსენოთ,რომ Ω' განვსაზღვრეთ $L_2[0,\infty]$-დან ფუნქციათა ნაწილის ამოღებით, რომლებიც არ ნულდებოდნენ სათავეში. მაგრამ დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ დარჩენილი ერთობლიობა არის მკვრივი $L_2[0,\infty]$-ში, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $f(x) \in L_2[0,\infty]$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი დადებითი $\delta > 0$ რიცხვისთვის, ყოველთვის მოიძებნება ფუნქცია $\varphi(x) \in \Omega'$ ისეთი, რომ $\int_0^\infty \left|f(x) - \varphi(x)\right|^2 dx < \delta$. ოპერატო-

რის დომენი უნდა იყოს მკვრივი, რათა არსებობდეს შეუღლე-ბული. ეს მკაცრად მტკიცდება ფუნქციონალური ანალიზის ლიტერატურაში.

გადავწეროთ (189) შემდეგნაირად

$$\int_0^\infty -\frac{d^2\varphi_2^*(x)}{dx^2}\varphi_1(x)\,dx=\int_0^\infty \varphi_2^*(x)\left[-\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\right]dx+\varphi_2^*(0)\varphi_1(0)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\varphi_1(0)}\frac{d\varphi_1(0)}{dx}-\frac{1}{\varphi^*{}_2(0)}\frac{d\varphi_2^*(0)}{dx}\right] \quad (191)$$

ვხედავთ, რომ თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{1}{\varphi(0)}\frac{d\varphi(0)}{dx}=\kappa\,, \quad (192)$$

სადაც κ არის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, ვიპოვით სხვა ოპერატორს. მართლაც, ვიპოვით ოპერატორთა ოჯახს, რომელიც დამოკიდებულია κ-ზე. მათ აქვთ ერთნაირი მოქ-მედება $-d^2/dx^2$, მაგრამ მოქმედებენ κ-ით დახასიათებულ სხვადასხვა დომენზე. შევნიშნოთ, რომ $\kappa=\infty,\ \ (\varphi(0)=0)$ შეესაბამება უსასრულო კედელს წერტილში $x=0$. ახლა, ჩვენს ცოდნაზე დაყრდნობით უკვე შეგვიძლია ვთქვათ, თუ რა არის ერმიტული ოპერატორი და რა არის თვითშეუღლებული ოპერატორი.

განვიხილოთ ოპერატორი A, განსაზღვრული მკვრივ დო-მენში $\mathscr{D}(A)$ ჰილბერტის სივრცისა. მისი შეუღლებული $A^\dagger$, რომლის დომენი $\mathscr{D}(A^\dagger)$, ისეთია, რომ ყველა ϕ და φ ფუნ-ქციებისთვის $\mathscr{D}(A)$-დან აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left(A^\dagger\phi,\varphi\right)=\left(\phi,A\varphi\right) \quad (193)$$

ოპერატორი A, არის ***ერმიტული,*** თუ ის მოქმედებს ისე, როგორც $A^\dagger$ და თუ მისი შეუღლებულის დომენი $\mathscr{D}(A^\dagger)$ ის-ეთია, რომ $\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(A^\dagger)$, ანუ ოპერატორის დომენი მო-ქცეულია მისი შეუღლებული ოპერატორის დომენის შიგნით. თუკი A ოპერატორის მოქმედება ემთხვევა $A^\dagger$-ის მოქმედებას

და $\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}(A^{\dagger})$, ოპერატორი არის ***თვითშეუღლებული.***

თვითშეუღლებული გაფართოება ერთზე მეტი განზომილების შემთხვევაში. პრაგმატული მიდგომა ჰამილტონის ოპერატორისათვის

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ფონ ნეიმანის თეორემის თანახმად ოპერატორი შეიძლება არ იყოს თვითშეუღლებული, მაგრამ დეფიციტის ინდექსის გარკვეული მნიშვნელობებისთვის შეიძლება გავხადოთ თვითშეუღლებული. ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ეს მიიღწევა სასაზღვრო პირობების მოდიფიცირებით. რაც შეეხება ფიზიკისათვის უფრო საინტერესო მრავალგანზომილებიან ($n \geq 2$) შემთხვევებს, შედეგების განზოგადება ხერხდება თითქმის ავტომატურად. მიუხედავად ამისა, მრავალ განზომილებას შემოაქვს დამახასიათებელი განსხვავებები, მაგრამ საერთო თეორიული სურათი არ იცვლება.

ქვემოთ განვიხილავთ ფიზიკურად ყველაზე გავრცელებულ 3-განზომილებიან შრედინგერის განტოლებას ცენტრალური სიმეტრიის პოტენციალურ ველში, $V=V(r)$, როდესაც სფერულ კოორდინატებში ხდება ცვლადთა განცალება და დინამიკის აღსაწერად მიიღება ერთგანზომილებიანი განტოლება სრული რადიალური ტალღური ფუნქციისათვის:

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right]R(r)+\frac{l(l+1)}{2mr^2}R(r)+V(r)R(r)=ER(r) \quad (193)$$

ანუ, შემოკლებული ფორმით, $H_R R(r)=ER(r)$

აქ ფრჩხილებში მოთავსებული ლაპლასის ოპერატორი კოორდინატთა სათავეში არის სინგულარული და მეორესთან ერთად შეიცავს წევრს პირველი რიგის წარმოებულით. თითქმის ტრადიციად იქცა, როგორც ფიზიკურ, ასევე მათემატიკურ ლიტერატურაში, გააძევონ განტოლებიდან პირველწარმოებულიანი წევრი, რისთვისაც შემოაქვთ გარდაქმნა

$$R(r)=\frac{u(r)}{r} \quad (194)$$

რის შემდეგ, წინასწარ $u(0)=0$ სასაზღვრო პირობის დადებით, მივდივართ ე.წ. დაყვანილ რადიალურ განტოლება-ზე $u(r)$ ტალღური ფუნქციისათვის

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right]u(r)=Eu(r) \quad (195)$$

ასევე ჩავწერთ შემოკლებული ფორმით, $H_r u(r)=Eu(r)$

2011 წელს ნაჩვენები იყო, რომ ამ განტოლებას ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ დაყვანილი რადიალური ტალღური ფუნქცია კოორდინატთა სათავეში ნულდება, ანუ თუ

$$u(0)=0 \quad (196)$$

ამის გარდა, დისკრეტული სპექტრის ტალღური ფუნქცია უნდა მიეკუთვნებოდეს ჰილბერტის სივრცეს (იყოს კვადრატ-ულად ინტეგრებადი):

$$\int_0^\infty |u(r)|^2\,dr=1 \quad (197)$$

იგულისხმება, რომ უსასრულობაში ტალღურ ფუნქციებს აქვთ საჭირო დაცემა.

ვხედავთ, რომ (195) განტოლება არის ერთგანზომილებიანი, ოღონდ რადიალური ცვლადი შემოსაზღვრულია ქვემოდან, სადაც (196) სასაზღვრო პირობა ედება. წმინდა ერთგან-ზომილებიანი ამოცანისგან რადიალური ჰამილტონიანი განსხ-ვავდება მხოლოდ ცენრგამშორი წევრით $\frac{l(l+1)}{2mr^2}$, რაც განაპ-ირობებს ამოხსნის ყოფაქცევას სათავეში

$$\underset{r\to 0}{u(r)}\sim c_1 r^l + c_2 r^{-(l+1)}; \qquad l=0,1,2,.... \quad (198)$$

ამასთან მეორე წევრის ყოფაქცევა მიუღებელია (196) სა-

საზღვრო პირობის გამო და ამიტომ გვრჩება მხოლოდ პირველი (რეგულარული) წევრი, $\sim r^l$. ეს ყოფაქცევა დომინირებს სათავეში, სანამ არ განვიხილავთ პოტენციალს $V(r)$. სათავეში ყოფაქცევის მიხედვით პოტენციალებისთვის შრედინგერის განტოლებაში მიღებულია შემდეგი კლასიფიკაცია:

1. რეგულარული პოტენციალები,

$$\lim_{r\to 0} r^2 V(r) = 0 \quad (199)$$

მათთვის სათავეში ამოხსნა იქცევა, როგორც

$$u(r) \underset{r\to 0}{\sim} c_1 r^l \quad (200)$$

2. „რბილად-სინგულარული" ან გარდამავალი პოტენციალები

$$\lim_{r\to 0} r^2 V(r) = -V_0 = const \quad (201)$$

აქ $V_0 > 0$ შეესაბამება მიზიდვას, მაშინ, როცა $V_0 < 0$ - განზიდვას.

3. ხისტად სინგულარული პოტენციალები

$$\lim_{r\to 0} r^2 V(r) = \infty \quad (202)$$

ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს "ცენტრზე დაცემას", რაც ახლა არ გვაინტერესებს.

რბილი პოტენციალი სათავეში იქცევა ისევე, როგორც ცენტრგამშორი წევრი, ამიტომ მისი განხილვისას იცვლება ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტიკა

$$\lim_{r\to 0} u(r) \sim d_1 r^{1/2+P} + d_2 r^{1/2-P}; \qquad P \equiv \sqrt{(l+1/2)^2 - 2mV_0} > 0 \quad (203)$$

ამიტომ, იმ შემთხვევაში, როცა რბილი პოტენციალიც მონაწილეობს, ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტიკა სათავეში ორი ნაწილისგან შედგება (სტანდარტული – st და დამატებითი-add)

$$\lim_{r\to 0} u(r) = a_{st} r^{1/2+P} + a_{add} r^{1/2-P} \equiv u_{st}(r) + u_{add}(r) \quad (204)$$

და ამიტომ ფუნქცია გამოდის კვადრატულად ინტეგრება-დი, სანამ

$$0 < P < 1/2 \quad (205)$$

ამ არეში მეორე (დამატებითი) წევრიც უნდა შევინარ-ჩუნოთ. რაც შეეხება $P \geq 1/2$ არეს, მხოლოდ სტანდატული წევრი $u_{st} = a_{st} r^{1/2+P}$ უნდა დავიტოვოთ.

მაგალითისათვის განვიხილოთ რადიალური განტოლება ნუ-ლოვანი $E = 0$ ენერგიის შემთხვევაში $l = 0$ მდგომარეობაში რბილი პოტენციალით $V = -V_0 / r^2$. ამ დროს რადიალური გან-ტოლება სამართლიანია მთელ სივრცეში. მის ამოხსნას აქვს სახე

$$u = Ar^{1/2+P} + Br^{1/2-P}; \; 0 < P < 1/2 \quad (206)$$

ვხედავთ, რომ ტალღურ ფუნქციას აქვს მარტივი კვანძი (ნული), რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$r = r_0 = \left(-\frac{B}{A} \right)^{1/2P} \quad (207)$$

(ნათელია, რომ მუდმივებს A და B უნდა ჰქონდეთ ურთი-ერთსაწინააღმდეგო ნიშნები r_0-ის ნამდვილობისთვის). ამი-ტომ ცნობილი თეორემის თანახმად (*ბმული მდგომარეობების რაოდენობა ემთხვევა რადიალური ტალღური ფუნქციის კვან-ძების რაოდენობას, როცა* $E = 0$*)*, გვექნება ზუსტად ერთი ბმული მდგომარეობა. შედეგი განსხვავდება ლიტერატურაში არსებულისაგან.

ახლა მივხედოთ რადიალური ჰამილტონიანის თვით-შეუღლებულობის საკითხს. H_r ჰამილტონიანის ერმიტულო-ბის პირობა $\left\langle v \middle| \hat{A} u \right\rangle = \left\langle \hat{A} v \middle| u \right\rangle$ დადის განტოლებაზე

$$\int_0^\infty u_1 \hat{H}_r u_2 dr - \int_0^\infty u_2 \hat{H}_r u_1 dr = \frac{1}{2} \lim_{r \to 0} \left[u_2(r) u_1'(r) - u_1(r) u_2'(r) \right] = 0 \quad (208)$$

სადაც $u_{1,2}(r)$ არის დაყვანილი რადიალური განტოლების (195) ორი სხვადასხვა საკუთარი მნიშვნელობის შესაბამისი

ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნა. ვხედავთ, რომ (196) სასაზღვრო პირობის გამო (208)-ის მარჯვენა მხარე ავტომატურად ნული გამოვიდა და რადიალური ჰამილტონიანი H_r არის ერმიტული ანუ სიმეტრიული. თვითშეუღლებულობისთვის, როგორც ვიცით, საჭიროა, რომ H_r-ის და $H_r^\dagger$-ის დომენები ერთმანეთს დაემთხვეს. თუ (208)-ის მარცხენა მხარეში გამოვიყენებთ რადიალურ განტოლებას

$H_r u_j\left(r\right)=E_j u_j\left(r\right)$, მივიღებთ

$$\int_0^\infty u_1\hat{H}_r u_2 dr-\int_0^\infty u_2\hat{H}_r u_1 dr=2m\left(E_2-E_1\right)\int_0^\infty u_1u_2 dr \quad (209)$$

როგორც აღმოჩნდა, თვითშეუღლებულობის პირობა პროპორციულია ტალღური ფუნქციების ორთოგონალურობის ინტეგრალის პირობისა, ამიტომ ეს ორი პირობა ურთიერთდამოუკიდებელია. რადგან თვითშეუღლებულ ოპერატორს უნდა ჰქონდეს (აქვს) ორთოგონალური საკუთარი ფუნქციები, ორთოგონალურობის პირობის შესრულება ავტომატურად ხდის H_r ჰამილტონიანს თვითშეუღლებულად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ გზით მიიღწევა თვითშეუღლებულობის პროცედურის რეალიზაცია. სწორედ ამაში მდგომარეობს "პრაგმატული მიდგომა," რომელიც არის გაცილებით მარტივი და ფიზიკურად უფრო გამჭვირვალე. აღსანიშნავია, რომ განხილული პროცედურა სამართლიანია მხოლოდ ***რადიალური ჰამილტონიანისთვის***, რადგან სხვა ოპერატორებისთვის არ წარმოიშვება (209) ტიპის პროპორციულობა.

გავარკვიოთ ახლა, როდის ხდება ნულის ტოლი (209)-ის მარჯვენა მხარე. თუ მარტო რეგულარ პოტენციალს განვიხილავთ და გამოვიყენებთ ტალღური ფუნქციების ყოფაქცევას სათავეში, მივიღებთ ნულს. ამიტომ რეგულარული პოტენციალისათვის რადიალური ჰამილტონიანი H_r არის თვითშეუღლებული და არ საჭიროებს გაფართოებას. ამის საწინააღმდეგოდ, რბილი სინგულარობის მიზიდვის პოტენციალისათვის, როგორც უკვე ვიცით, უნდა შევინარჩუნოთ დამატებითი ამოხსნაც,

$u_{add}\sim a_{add}r^{1/2-P}$. ახლა (209)-ის მარჯვენა მხარე აღარ იქნე-

ბა ნული, საზოგადოდ, არამედ, ტოლია

$$m\left(E_1-E_2\right)\int_0^\infty u_2u_1dr=P\left(a_{1,st}a_{2,add}-a_{1,add}a_{2,st}\right) \quad (210)$$

თუ ცალკე განვიხილავთ $P=0$ შემთხვევას, მარჯვენა მხარეში მიიღება

$$m\left(E_1-E_2\right)\int_0^\infty u_2u_1dr=-\frac{1}{2}\left(a_{1,st}a_{2,add}-a_{1,add}a_{2,st}\right) \quad (211)$$

ამრიგად, დამატებითი ამოხსნის გათვალისწინება იწვევს ორთოგონალურობის დარღვევას და ამიტომაც H_r აღარ გამოდის თვითშეუღლებული. ისმის ბუნებრივი კითხვა: როგორ მივაღწიოთ ამ ოპერატორის თვითშეუღლებულობას? ზემოთ განხილულ ორივე შემთხვევისათვის უნდა მოვითხოვოთ, რომ ყველა მდგომარეობისათვის შესრულდეს პირობა

$$a_{1,st}a_{2,add}-a_{1,add}a_{2,st}=0 \quad (212)$$

ამის შედეგად რადიალური ჰამილტონიანი გახდება თვითშეუღლებული! შემოაქვთ პარამეტრი

$$\tau\equiv\frac{a_{add}}{a_{st}} \quad (213)$$

რომელიც არის ერთნაირი ყველა დონისთვის და ნამდვილი. განხილულ ამოცანაში ის ისეთივე როლს ასრულებს, როგორსაც ასრულებდა κ პარამეტრი ერთგანზომილებიან ამოცანებში. ცხადია, მასზე იქნება დამოკიდებული ჰამილტონიანის სპექტრი და სხვა დაკვირვებადი სიდიდეები. მისი რიცხობრივი მნიშვნელობა არ ფიქსირდება, საჭირო ხდება რაიმე ფიზიკური მოვლენის განხილვისას მისი დაფიქსირება ექსპერიმენტიდან.

არსებობს უამრავი ნაშრომი, მიძღვნილი რბილი სინგულარული პოტენციალისადმი, რომელიც ფიგურირებს ისეთ მნიშნელოვან ამოცანებში, როგორიცაა სავალენტო ელექტრონის მოდელი წყალბადისებრ ატომებში, კულონური და ჰულტენის პოტენციალები კლეინ-გორდონის და დირაკის განტოლე-

ბებში, შავი ხვრელების თეორია, კონფორმული კვანტური მექანიკა, დირაკის მონოპოლები, კვანტური ხოლის ეფექტი, სიგულარული ოსცილატორი (კალოჯეროს მოდელი) და ა.შ. ბევრ მათგანში ჩამოთვლილი ამოცანებიდან საჭირო ხდება თვითშეუღლებული გაფართოების თეორიის გამოყენება. გაფართოების შედეგად ნაპოვნია რიგი ახალი მდგომარეობებისა, რომელთა შესწავლა მოსალოდნელ ექსპერიმენტებზე დაგეგმილია და ამ მიმართულებამ მიიღო სახელწოდებად *„თვითშეუღლებული გაფართოების ფიზიკა“.*

დასკვნისათვის

წინამდებარე წიგნის ამოცანა იყო ორნაირი: 1. გაუწიოს პოპულარიზაცია კვანტურ ოპერატორთა თვითშეუღლებული გაფართოების თეორიას როგორც სტუდენტებში, ასევე მასწავლებლებში და 2. განიხილოს კონკრეტული მაგალითები ზოგიერთი პოტენციალისა, რომლებიც გვხვდებიან კვანტური მექანიკის სახელმძღვანელოებში. მოვიყვანეთ საკმარისად ფართო ინფორმაცია ფუნქციონალური ანალიზიდან ჰილბერტის სივრცეების შესახებ, მივაქციეთ მთავარი ყურადღება შემოუსაზღვრელი ოპერატორების თვისებებს მრავალგანზომილებიან ჰილბერტის სივრცეებში, გავავლეთ განსხვავება ერმიტულ და თვითშეუღლებულ ოპერატორებს შორის. მთავარი აქცენტი გადატანილი იყო ერთგანზიმილებიანი კვანტური მექანიკის დამზერადებზე. გამოვკვეთეთ ოპერატორების განსაზღვრის არის (დომენის) მნიშვნელობა, რომ ოპერატორი არ განისაზღვრება მარტო თავისი მოქმედებით, არამედ აუცილებელია მითითებული იყოს მისი დომენი, რაც ხშირად უყურადღებოდაა დატოვებული არსებულ სახელმძღვანელოებში. კიდევ ერთხელ მივაქცევთ ყურადღებას იმ გარემოებას, რომ წიგნი არ არის დაწერილი სახელმძღვანელოს ტრადიციულ სტილში, არამედ გადმოსცემს საჭირო ინფორმაციას მათემატიკიდან, განსაკუთრებით ეს ეხება ფუნქციონალური ანალიზიდან ინფორმაციას, რომელიც არ გვაქვს სისტემატიზირებული ლემა-თეორემების სტილში. დაინტერესებული მკითხველი ჩაიხედავს მითითებული ლიტერატურის ნუსხაში და მოძებნის მისთვის საინტერესო მასალას. არსებითია, რომ წიგნი პარალელურად გამოდგება მათემატიკური ფიზიკით დაინტერესებული სტუდენტისათვის. ამრიგად, ფიზიკის მაგისტრანტებს და დოქტორანტებს, მათემატიკოსებთან ერთად ხელი შეეწყობა თანამედროვე კვანტური მექანიკის პრობლემური საკითხების შესასწავლად.

რა თქმა უნდა, წიგნი ვერ იქნება თავისუფალი ხარვეზებისგან, განსაკუთრებით, ფუნქციონალური ანალიზის მასა-

ლის გადმოცემის კუთხით. მაგრამ, ავტორი იმედოვნებს, რომ ახალგაზრდების დაინტერესება წიგნით, რომელიც მშობლიური ენაზე განიხილავს თანამედროვე ფიზიკის ქვაკუთხედურ პრობლემებს, გადასწონის მრავალ ხარვეზს.

გამოყენებული და რეკომენდებული ლიტერატურა

წიგნები:

1. N.N.Bogoliubov, A.A.Logunov, A.I.Oksak I.T. Todorov _“Introduction to axiomatic quantum field theory. MP monograph Series 18; 1975).
2. P.A.M. Dirac, “The principles of Quantum Mechanics”, 4th edn. (Oxford Univ. Press), 1958.
3. J.M. Jauch, “On bras and kets _ a commentary on Dirac’s mathematical formalism on quantum mechanics” (Cambridge Univ. Press), 1972.
4. B.R. Gelbaum and J.M.Olmsted, “Counterexamples in Analysis”, (San Francisco),1964.
5. P.Carruthers and M.M. Nieto, “Phase and Angle variables in quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. 40, 411-40 (1968).
6. A. Calindo and P. Pascual, “Quantum Mechanics” vols. 1 and 2 (Berlin:Springer), 1990,1991.
7. F.Riesz and B. Sz-Nagy,” Functional Analysis (New York), !955.
8. N.I. Akhiezer and I.M. Glazman. “Theory of Linear Operators in Hilbert Space”, (New York),1961.
9. N. Dunford and J.T. Schwartz, “Linear Operators” vol 1-3 (New York), 1958,1963, 1971.
10. M. Reed and B. Simon, “Methods of modern mathematical Physics”,vol 1 Functional analysis, (New York), 1980.
11. E. Zeidler, “Partial differential equations _ Applications to mathematical physics (Berlin), 1995.
12. M.A. Shubin, “Partial differential equations YII _ Special Theory of Differential operators, 1994.
13. T.F. Jordan, “Linear operators for quantum mechanics (New York), 1969.
14. E. Kreyszig, “Introductory Functional Analysis with Applications (New York), 1989.
15. I.M. Gel’fand and N.Ya. Vilenkin, “Generalized Functions, Vol.4, applications of Harmonic Analysis (new York),1964.

16. A. Messiah, “Quantum mechanics”vols 1 and 2 (Amsterdam) 1961.
17. E. Merzbacher, “Quantum Mechanics (new York), 1970.
18. K.Gottfried,”Quantum Mechanics”, (Benjamin-cummings), 1966.
19. C. Cohen-Tannoudji et al.”Quantum Mechanics, vols 1 and 2 (paris: Ellipses), 1977.
20. J. J. Sakurai, “Modern Quantum Mechanics”, (Addison-Wesley), 1994.
21. F.A. Berezin and M.A. Shubin, “ The Schrodonger Equation”, (Dordrecht), 1991.
22. W. Thirring, “A Course in Mathematical Physics”, (Berlin), 1991.
23. M.H. Stone, “Linear Transformations in Hilbert space and their applications to Analysis” (Providence), 1932.
24. W. Schmeidler, “Linear Operators in Hilbert space”, (Berlin),1954.
25. F. Mandl, “Quantum Mechanics”, (new York), 1992.
26. L.E. Ballentine, “ Quantum MecHanics _ a Modern Development (Singapoore), 1998.
27. J.M. Jauch, “Foundations of Quantum Mechanics (Addison-Wesley), 1968.
28. L.D. Landau and E.M. Lifschitz, “Quantum Mechanics:Non-relaticistic Theory”, (London),1977.
29. L.I. Schiff, “Quantum Mechanics 3nd edn (New York), 1968.
30. S. Alberio, F.Gesztesy, et al. “Solvable Models in Quantum Mechanics”, (Berlin), 1990.
31. D.M.Gitman, I.V.Tyutin and B.L.Voronov, “Self-adjoint extentions in Quantum Mechanics” Springer (New York), 2012.

წიგნები რუსულ ენაზე:

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный Анализ. М.1977ю
2. Соболев С.Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М. 1988.
3. Функциональный анализ, СМБ, М.1964.
4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Обобщенные функции, М.1964.

მიმოხილვები და სტატიები:

1. T. Juric, “Observables in quantum mechanics and importance of self-adjointness” , arXiv: 2103. 0108ov3 [quant-ph], 2022.
2. K.S. Ranade, “Functional analysis and quantum mechanics: an introduction for physicists”, Fortschr. Phys. 63, No 9-10, 644-658 2015).
3. F.Gieres, “Mathematical surprises and Dirac’s formalism in quantum mechanics”, Rep. Prog. Phys. 63 , 1893-1931 (2000).
4. Andrea Cintio and Alessandro Michelangeli, “ Self-adjointness in Quantum mechanics: A Pedagogical path, arXiv: 2012.14449v2 [quant-ph], (2021).
5. Guy Bonneau et al., “Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics”, Am.J.Phys.69(3) 322-331 (2001).
6. V.S. Araujo et al., “Operator domains and self-adjoint operators”, Am.J. phys.72(2), 203-213(2004).
7. V.S. Araujo et al., “The time-dependent Schrodinger equation: The need for the Hamiltonian to be Self-Adjoint”, Brazilian Journ. Of Physics, vol. 38, no 1, 178-186, March (2008).
8. Eberhard Zeidler, “Infinite-dimensional Hilbert Spaces”, (2020).
9. Rafael de la Madrid, “The rigged Hilbert Space of the Algebra of the one-dimensional rectangular barrier potential”, Journ. Of Physics A, Mathematical and General,.37,8129-8157(2004).
10. Rafael de la Madrid, “The role of the rigged Hilbert space in Quantum Mechanics”, arXiv: quant-ph/0502053v1 (2005).
11. Jurgen Audretsch et al. “A pragmatic approach to the problem of the self-adjoint extension of Hamilton operators with the Aharonov-Bohm potential”, arXiv: quant-ph/ 9503006v1 (1995).
12. Khelashvili A.A. and Nadareishvili T.P. “Singular behavior of the Laplace operator in Polar spherical coordinates and some of its consequences for the radial wave function at the origin of coordinates”, Physics of Particles and Nuclei, Letters, vol.12, N1, pp.11-25 (2015).

ანზორ ხელაშვილი (დაბ. 1938 წელს) არის ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი. სამეცნიერო ხარისხი მინიჭებული აქვს სპეციალობით – თეორიული და მათემატიკური ფიზიკა. არის 150-ზე მეტი ნაშრომის ავტორი, რომლებიც გამოქვეყნებულია სერიოზულ საზღვარგარეთულ ჟურნალებში. მას დაწერილი აქვს 8 წიგნი, მათ შორის, 4 სახელმძღვანელო ზოგადი და თეორიული ფიზიკის წამყვან საკითხებზე. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მუშაობს 1965 წლიდან, გაიარა თითქმის ყველა პედაგოგიური და სამეცნიერო თანამდებობა, ასპირანტიდან კათედრის გამგემდე, იყო უნივერსიტეტის პრორექტორი სამეცნიერო მუშაობის დარგში, არის რამდენიმე პრესტიჟული სამეცნიერო-პედაგოგიური საზოგადოების წევრი და პრემიების ლაურეატი. მისი სამეცნიერო ინტერესების სფეროა ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკა, ველის კვანტური თეორია.

anzorkhelashvili@hotmail.com

ISBN 978-9941-501-31-9